

王洪礼 冯剑丰 主编





赤潮生态动力学与预测

王洪礼 冯剑丰 主编 吴金克 黄东卫 李胜朋 副主编



内容循介

本书首先阐述了赤潮的成因、分类与分布及国内外的研究现状,然后深入浅出地介绍了进行赤潮非线性预测的相关理论方法。包括现代非线性或力学分岔与混沌理论。非线性随机动力学理论及相关的数值计算方法,并以渤海赤潮为例具体研究了赤潮的非线性动力学行为。本书还介绍了各种人工神经网络法、统计回归法、被值理论以及支持向量机理论在赤潮预测中的应用,并在此基础上提出了赤潮预测预赛系统的电影和赤潮的防治对策。

本书可供从事赤潮和海洋生态与环境以及环境力学研究的科技工作者、高等院校师生和 有关管理人员参考,同时也为我国赤潮的预测、防治与管理提供了科学依据。

图书在版编目(CIP)数据

赤潮生态动力学与预测/王洪礼,冯剑丰主编,一天律:天 津大学出版社,2006.4 ISBN 7-5618-2275-8

I.赤... I.①王...②冯... II.①红襕-生态学; 动力学-研究②红襴-預测-研究 IV.X55

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 023475 号

出版发行 天津大学出版社

出版人 杨欢

抽 大津市 7津路 92 号天津大学内(邮编:300072)

电 话 发行部:022-27403647 邮购部:022-27402742

岡 址 www.tjup.com

短信网址 发送"天大"至 916088

印 刷 昌黎太阳红彩色印刷有限责任公司

经 销 全国各地新华书店

开 本 185mm×260mm

卵 张 18

字 数 450千

版 次 2006年4月第1版

印 次 2006年4月第1次

印 数 1-1500

定 价 29.00元



王洪礼教授

1945年出生、女、满簇、河北沧州市 1967年毕业于清华大学工程力学系。 1982年天清大学研究生学。现任天津大 学力学系教授、博士生导师。教育部科学 技术委员会数理学部会员。享受国务院政 有特殊津贴专家。兼任事报动工程学会理事长、中国振动工程学会理事、中国 促發(表学会气象水文海洋仪器分会理 事

多年来一直从事非线性振动理论与应 清洋环境力学和赤湖预测预管方面的研究。作为项目负责人。已完成和正面的 研究。作为项目负责人。已完成和正面的 的合部级科研项目共计20余项,其中国富 的然科学基金项目有8项。已获10多项名 级和技进步奖和自然科学奖。在国内外刊 特上发表文章150余篇

组稿编辑 田 达 责任编辑 周小明 装帧设计 谷英卉 技术设计 郭 婷



前 言

赤潮是指在一定的环境条件下,房水中某些浮腔生物由于暴发性增殖或高度聚集而引起的商水变色的一种生态异常观象。近年来,一方面随着现代化工农业生产的迅猛发展,沿海地区人口的增多,大量工农业废水和生活污水排,海洋、近海和港湾富芳年纪费住的严重,另一方面,沿海开发程度的提高和海水养殖业的扩大,也带来了海洋生态与环境及养殖业自身的污染问题,此外,海洋运输业的发展也导致外来有害的赤潮廉类的引入。与此同时,全球气候的安娜也算受,在现后生活编码解聚步生。

我国赤襦灰害发生的主要领域为东海、南海、渤海和黄海。赤湖发生的频率越来越东。规 模越来越大。2003 年全国就发生了119 次赤湖、发生面积为 14 550 km²; 2004 年全国发生赤湖 96 次、数量有所减少。但发生面积却迟到了 26 630 km²; 12 2003 年增加 83%。赤湖造成的经济 损失巨大,如 1998 年的赤湖严重地破坏了海洋莽殖业和渝业资源、恶化了海洋环境、损害了海 洋旅游业、给海洋经济的可持续发展带来严重影响。而且看赤赤湖的发生对人类健康也构成 7板 长内破损

为了減少赤潮次言对我国海洋经济、海洋环境、海洋生态和人民生命财产造成的影响。我国各级科技部门的领导和有支令家近十年来加快开展了这方面的研究。如1994年国家自然科学基金"七五"電大项目"中国东南沿海赤潮发生机理师究"结题验收、并于2003年出版了专著《中国沿海赤潮》,再如2003年"十五"国家科技攻关计划重点项目中的"赤潮次害预报技术研究"课题完成,并出版了(赤潮灾害预报机理'与技术》文集。总之、有关赤潮的研究和专著还很多,内容也在不断深处。本书同样是在2001年以来教育部科学技术的完重点项目和天津市社会发展项目"渤海赤潮非线性预测预警系统研究"以及国家自然科学基金资助项目"海洋赤潮生态动力学系统的分法、混沌与预测研究"的研究成果的基础上完成的。

本书为了更深入地研发未满问题,主要采用非线性动力学理论,人工智能和数理统计中当 今比较先进的方法进行赤潮的预测,在非线性动力学理论中,除了用到确定系统的分合、混构。 理论,选针对赤潮发生的特点采用了不确定系统的非线性随机动力学理论,在人工智能方法中 除了用一般的人工神经网络方法外,还针对我国赤潮数据小样本的问题用了"支持向量机"法; 在数理统计方法中,除了用非参数问出法外,还用问目树法进行了预测。此外,对赤潮发生的 刺来还用"增度研究"进行了分析。书后还介绍了赤潮预照微繁系经与赤湖的综合治理。

本书仅是我们的阶段性研究成果,受水平和时间所限,错误与不当之处在所难免,恳请同 行专家和读者给予批评指正。

王洪礼

2005年11月15日于天津大学

1

目 录

第1章	赤瀬板述	
1.1	赤襕的成因	(1)
1.2	赤潮的分类与分布 ·····	
1.3	赤潮的研究现状 ······	(7)
第2章	非线性动力学理论基础	
2.1	稳定性理论	
2.2	分岔理论	
2.3	混沌理论	
2.4	非线性随机动力学理论 ·····	(40)
第3章	数值计算及模拟	
3.1	数值计算方法 ·····	
3.2	数值计算软件及应用 ·····	
第4章		
4.1	单种群赤潮藻类的非线性动力学	
4.2	多种群赤潮藻类的非线性动力学	
4.3	赤潮食物链的非线性动力学 ·····	
第5章		
5.1	多种群赤''	
5.2	赤潮食物链的非线性随机动力学	
第6章		
6.1	非多数回归	
6.2	回归树及其集成算法	
6.3	赤潮的混合回归预测	
6.4	渤海湾生态环境状况调查与评价	
6.5	渤海湾赤潮的综合预测	
第7章		
7.1	人工神经网络方法	
7.2	浮游植物密度的人工神经网络預測	
7.3	基于支持向量机的海水富营养化评价与浮游植物密度预测	
7.4	知识发现在海洋监测中的应用	
第8章		
8.1	极值理论	
8.2	赤潮发生的频率分析	
館9音	赤湖的预测预警系统与综合治理	(237)

9.1	赤潮預測預警系统	(237)
9.2	海洋生态系统管理的概念与原则	(249)
9.3	赤襕灾害的综合管理与防治	(252)
1录1	第6章用到的主要程序	(257)
景2	第8章数据 redtide.data(10 ⁻⁵ ·L ⁻¹)	(261)
持录 3	第8章用到的主要程序	(262)
考文	*	(267

第1章 赤潮概述

赤潮是指在一定的环境条件下,海水中某些洋游生物由于是发性增殖或高度聚集而引起

海水变色的一种生态异常观象(图 1-1)。世界上多數 学者对赤潮的定义是"有害继美的水华(Hamfial Alpal Blooms, HABs)"。赤潮是一个历史沿用名、它并 不一定都是红色、实际上是许多种藻类攀发观象的 统称。赤潮由于发生的原因, 种类和数量的不同, 水 体会呈现不同的颜色, 有红色或砖红色, 绿色、黄色、 棕色等。值得指出的是、某些赤潮生物(如鞣肉藻、 裸甲藥、梨甲藥等)引起的赤潮有时并不引起肺水呈 现任何转别的颜色。

赤潮是一种自然现象。人类早就有相关记载, 据载,中国早在2000多年前就发生过赤潮现象。一 些古书文献或文艺作品里已有一些有关赤潮方面的



图 1-1 赤潮

记载,如消代滴松龄在《瞬斋志异》中就形象地记载了与赤滴有关的发光现象。国外如《旧约· 出埃及记》中就有关于赤潮的描述:"何里的水,都变作血、河也熙臭了,埃及人就不能喝这里的 水了"。在日本、早在腾阳时代和镰时代就有赤潮方面的记载。1803 年法国人马克·莱斯卡波 特记载了美洲罗亚尔湾地区的印第安人,根据月黑之夜观察海水发光现象来判别贻贝是否可 以食用。1831—1836年,达尔文在《贝格尔航海记录》中也记载了在巴西和智利近海面发生的 或手系引发的杰加事件。

随着现代化工农业生产的迅猛发展,沿海地区人口的增多,大量工农业废水和生活污水槽 人海洋,其中相当一部分未经处理就直接排入海洋,因此导致近海和港湾地区富营养化程度日 趋产重。同时,沿海大发程度的提高和海水养殖业的扩大,也带来了海洋生态环境和养殖业自 身污染的问题。另一方面,海运业的发展导致外来有害赤湖种类的引人。此外,全球气候的变 暖也导致了赤潮的频繁发生。

1.1 赤潮的成因

1.1.1 环境因素

赤襦是一种复杂的生态异常现象,发生的原因也比较复杂。关于赤襦发生的机理至今尚 无定论。在正常的理化环境条件下,赤襦生物庄泽都生物中所占的比重并不大,有些鞭毛虫类 (成者甲藻类)还是一些色虾的食物,但是由干特殊的牙境条件使某些赤襦生物过量繁殖,便形 成赤襦。大多数学者认为,赤襦发生与下列环境很紧密切相关。

第一、海水的富营养化是赤襕发生的物质基础和首要条件。由于城市工业废水和生活污水大量推放人海、使营养物质在水体中富集、便造成海域富营养化。此时、水城中的氦、磷等营

养盐类, 恢、锰等微量元素以及有机化合物的含量大大增加, 从而促使赤潮生物的大量繁殖。 赤潮检测的结果表明, 赤潮发生海域的水体站上遭到严重污染。氦、磷等清茶盐物质大大超标。 例完表明, 1 也版水中含有的某些金属可以刺激赤潮生物的增殖。在海水中加入小于 3 mg/dm² 的铁螯合剂和小于2 mg/dm² 的铁螯合剂。可使赤潮生物卵甲灌和真甲灌达到最高增 艰辛;相反, 在没有铁、锰元素的海水中, 即使在最适合的温度、祛度、pH 值和基本的营养条件 下, 种群的密度也不会增加。 其次, 生有机物质也会促使赤潮生物的盆刻增增,如用无机营 养盐培养简单模甲藻,生长不明疆。但加入酵甲提取液时, 则生长量差, 加入土壤提出液和维生 4 R.B.H.来每种甲藻上生长明经。

第二、水文气象和尚水理化因子的变化是赤潮发生的重要原因。尚水的温度是赤潮发生的重要环境因子、20~30 ℃是赤潮发生的适宜温度危阻。再学家发现。周内海水温度更然升至20~10 年度未潮发生的适宜温度危阻。再学家发现。周内海水温度更然升生、50 年的大量繁殖的原因之一。益度在26~37 范围内均有发生赤潮的可能。但是海水盐度在15~21.6时,容易形成温度层和盐酸层。温度成为有发生赤潮的繁华规度,条件、场质发赤潮。由于径域。漏升端、水损或污染的全作。打用,被物或过的背容站上升到两水上层、边房海市水域高度富含客化。作者在贵星的自治时十升,便引起赤潮塞的大量繁殖。如硅藤过盛、特别是骨外硅等的等度常常引起赤潮。这些年都美少为夜光端提供了丰富的印料。促使夜光端公园增价从从面又形成粉生的食光灌赤潮。这些年都美少为夜光端提供了丰富的印料。促使夜光端公园增价从从面又形成粉生的食光灌盖面。整则紫料太阳。

第三、海水养殖的自身污染亦是诱发赤潮的因素之一。随着沿海养殖业的大发展,尤其是 对外养养业的造物发展。也产生了严重的自身注象问题。在对虾养殖中、人口投喂大量利利 等活饵料、由于养殖技术的保证和不完善。往上造成使用结构之、他为我会印制增多。严重污 第二条统术统,另一方面,由于勤能均人需要持模水、所以每人都有大量污水增入海中。这些 带有大量或用利力等壳便的水中含有氢氧、尿素、尿酸及其他形式的含氧化合物。加快了海水 的富岩养化、便为赤潮生物提供了适宜的生物环境。使其增强加快,特别是存高温、积热、无风 的条件下更易发生赤潮。由此可见。海水养殖业的自身污染也会使赤潮发生的频率增加。

1.1.2 形成过程

亦捌的形成主要绘历以下4个阶段:赤瀬簾类孢子的存在─一定的物理、化学条件下开始 分裂繁殖 大量的暴发性增殖形成赤쾲一形成配子、产生孢子

第 ·阶段; 藻类作为孢囊体眠于海底淤泥中 如果没有外力干扰(物理或自然), 孢囊将体 眠數年。如果条件合适, 孢囊将慢慢发育

第二阶段: 当温度及光照条件合适时, 他囊将发育成单细胞藻类。

第三阶段:如果条件继续合适,单细胞的蘸类将变成营养性细胞,并以几何级数分裂 当 豪类密度达到一定阈值时,就会暴发赤潮。

等四阶段;如果条件不合适,细胞就会停止分裂而形成配子,两个配子形成受精卵,受精卵 又形成夜囊,沉在海底,从而完成一轮生命周期。

赤潮的形成过程如图 1-2 所示。

为了更好地阐述赤潮的成因,下面从黄分方程的角度来考虑赤潮的形成机制。首先考虑方程(1-1)。

$$\frac{dN}{dt} = \mu N - mN \pm A dv Diff \qquad (1-1)$$

其中,N表示赤潮藻类的密度,μ表示赤潮藻 类的生长率,m表示赤潮藻类的死亡率(自然 死亡、捕食等),AdaDaT表示由于对流和扩散 造成的赤潮藻类密度少化。

1.赤潮藻类的生长率 /4

赤褶的暴发与赤潮藻的生长率µ密切相关、多种生物、化学、物理因子可直接或间接 发、多种生物、化学、物理因子可直接或间接 地影响,赤潮藻类的生长率、从而影响赤褶的 形成、Damel(2001)对此件了一个较为个面的 经济

人类社会的水的指放直接造成了海水的 富智春化 而富智春化银有可能是造成未凋 每发的主要原因 不同的產类有看不同的 放大生长率 p_{im}和半饱和聚数 K, 有些微类具 有较人的最大生长年和半饱和聚数 K, 月日 p_{im} A, 较写《warda, 1997》这种微类有高 音春的总下常常会获得竞争优势(Killsam, 1984)从前边易干淡倒经高的除价

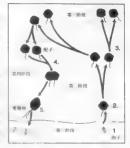


图 1-2 未糖形成过程点 6 图 (http://www.whor.eshafredtide)

还有一些物理过程可以导致局部的酶水高資养化,比如1 月流,以生能合成,这些物理过程可以将跨低岭时及矿物质运送到西洋表层,从海给蘸类提供了充足的营养源,促进蘸类生 长。水并分层也会促进某些藻类的1 K.比如 Mexandrum caterulla, Grunsdumm caterullum,以及 Droughysis, sp (Parel, 1988,~Horz, 1997) 这些蘸类可以垂直移动,既可以在表层软料充足的附近,也可以移动到富含营养物的商属层。

温级层的存在可以蒸发流表的上理特性/这种特性石油/生物疾得愈单优势,从而诱发染 例如微类的最大生长率_{化一}同温度共有止相关性(Brech and Lessdale, 1997)。半饱和系数 A. 阿温度其有角性光性 因此,低温和高温都可以使得相应的激类实得急争体势

紊流可以减弱运产的水柱分层,当紊论对达一定阈值对。 非藻类的生长会被抑制(Thomas et al., 1997)。因此,一些可以降低紊流的因子可以促使藻华的形成

大陆架的锋面地带由于物理、化予状况变化较大,一些具有较高适应能力的藻类就可以获 得竞争优势

海水的次茶。Enge来直接改变了海洋逐渐生态系统的组成和结构(Semmer, 1989)。例如、 数与简的浓度的比值较低的即候有利于 Cvarobacteria 形成藥件(Sellner, 1997)。当海水中硅酸 盐的营养性倒较高时,可以促进針維生长。

2 赤潮藻类的死亡率 m(自然死亡、捕食等)

赤湖羅英的死亡主要有自然死亡和捕食两个因素 高等动物的捕食在赤潮形成过程中扮演有极为重要的角色 当高等捕食者较少时、lop-down 控制破弱、这就使得 些藻类疾得竞争 优势。另外、种群动力学的研究特别是非线性种群动力学的研究结果是小、食物链及食物网结

构的浮游生物系统会表现出复杂的动力学特性(Huisman J. 2001),而驀华极有可能就是这种复 杂动力学的一种体理。

3.对流扩散项(AdaDaff)

扩散与对流在赤潮从一个帕区转移到另一个帕区的过程中起着主导作用。世界上很多地 区的赤潮都是由于洋流的影响而造成的、比如西佛罗里达海岸的 G. breve, 以及瑞典海岸的 Dr. nophysis ap(Anderson, 1997; Babaran et al., 1998; Tester and Steidinger 1997).

1 2 赤鲫的分类与分布

未謝的分类 1 2 1

根据承围的分类标准可以将来加划分为不同的类别。通常采用两种分类标准:根据赤潮 发生的区域以及引起赤潮发生的蓬类有无毒性,具体见表 1-1。

划分依据	赤 削 炎 型
	外海市
	内海、海湾型
发小区域	添殖区型
	外水型
	1.64F
行光解性	有毒件:麻痹性贝毒(USP)、鞭智作贝毒(DSP)、神经性贝毒(NSP)、记忆缺失性贝毒(ASP)以 及两加鱼毒(CPP)

1.2.2 赤潮的分布

[,赤潮在世界范围内的分布

目前,赤潮已成为一种世界性的公害、美国、日本、中国、加拿大、法国、瑞典、挪威、菲律宾、 印度, 印度尼西亚、马来西亚、韩国、香港等 30 多个国家和地区赤洲发生都很频繁, 具体分布如 图 1-3 所示。

2. 我国赤潮名发区分布

- 根据我国海域的分布特点和近几十年的观测和记录,我国赤潮灾害的主要发生海域如下:
- ①渤海海域,主要包括辽东湾中部、秦阜岛附近海域、渤海湾,莱州湾:
- ② 黃海海域,主要包括辽宁庄河附近海域、烟台海域、胶州湾、海州湾;
- ③东海海域,主要包括长江口海域、舟山群岛附近海域、浙江东部沿海、厦门西港;
- ①南海海域,主要包括大鹏湾、大亚湾、珠江口附近海域、拓林湾以及香港的维多利亚湾

其中辽东湾、渤海湾、莱州湾、长江口(包括杭州湾)和珠江口为赤潮多发区。辽东湾、渤海 湾和长江口赤潮发生的面积可能增加;而珠江口海域赤潮发生的面积一般不会太大,但赤潮发 牛糖率相对要高些;由于南海水温较高,有毒藻类种类及其引发的有毒赤潮相对要多些,因此



图 1-3 世界范围内未确发生的区域分布

造成的经济损失和人员中最事件也会增多

3 我国赤湖发生状况

我国各海区近50年赤浦发生次数如图1-4所示,2000年和2001年各省市赤潮发生次数如 图 1-5、1-6 所示 2002 年至 2004 年我国赤潮灾告统计结果如表 1-2 所示

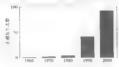


图 1-4 中国海区赤洲发生情况



图 1-5 2000 年 本潮 发生情况



图 1-6 2001 年 赤潮发生情况

麦 1-2 2002—2004 年赤瀬灾害统计

N K		赤 柳发生 次 数		1	据计发生plu程(km²)		
	3002 ()	2003 %	2004 5	3002 1	2003 [2004 1	
51, 162	1	5	I 13	310	410	820	
神物	14	12	12	300	460	6 520	
东沟	51	86	53	9 000	12 990	17 880	
k, 163	11	16	18	540	690	1 410	
11	79	119	96	10 150	14 550	26 630	

特別值得社查的是:2004年5月,浙江自由附近五域发生面积为8,000-10,000 km 的特人 未搬流破严重危法;2004年7月3日起湖南西域已发生西滨大面积的赤湖,到7月20日,同 烟歌测到连线发生不同程度的赤潮丛7次之多,塞止忠而积远万平万千米,占清南北面积的小 分之一还多

2005年5月浙江海域发生了大规模赤湖(图 1-7)



图 1-7 2005年5月浙江玉环海域发生条带状的赤潮

赤開发生的整体趋势为:规模越来越大、分布越来越广、次数越来越多

13 未潮的研究理状

因内外未潮的研究主要包括以下5个方面。

赤潮藻的培养生物学和分类学研究 1 3 1

根据赤潮发生的记录种、进行赤潮蓬类分类学的研究是赤潮研究的一个重要方向。由于 人们对赤潮的研究时间较短,而且重视程度不够,所以有关赤潮生物种的研究还很不充分。因 此,加强赤潮藻分类学的研究,记录赤潮发生物种,并在实验室进行培养和研究具有非常重要 的理论和实际意义。赞商大学的齐雨蓬和黄长江二位老师,以及国家海洋局监测中心的繁浩 老师在这方面都做了大量工作,取得了较大成果。

1.3.2 赤潮藻类的生活史的研究

历史上未溯游光的海企中随着环境的变化而发生改变。近 20 年来,由于现代工业的范围 发展,海洋环境的持续紧化,引发大规模赤潮的赤潮生物种群发生了相当大的变化,也出现了 许多新的生物记录种。表1-3绘出了近年来中国有事赤渊藩种的变化情况。

		寒 1-3	1-3 近年未平岡何書亦楊維神央支化情点(何等集及中集所白江河印文化)						
自代	新种	印施	有毒藥	PSP / 小海衛	DSP 产品级	NSP / 市保	ASP r ⁵ 市務	CFT 产品条	其他有毒藥
1991		26.4	12.1	5	3		1		2
1997	34	52.9	24.1	5	5	1	1	4	5

1.3.3 赤瀬藻类毒素的研究

赤湖的发生除了造成重大经济损失外。由于有基赤湖蓬类代谢产生的膨素也威胁着人们 的身体健康。赤渊发生时,有番赤渊塞类的毒素在鱼和其他贝类混产品的体内积累,人们误食 此类海产品会引发各种病状,甚至会造成死亡。

根据目前的研究, 按人们的中非症状, 塞弗索共分为麻痹性贝毒 PSP、腹泻性贝素 DSP、 神经性贝醛 NSP、记忆缺失性贝毒 ASP 和西加鱼毒 CFP。

对赤潮毒素的研究方向集中在主要赤潮蓬类毒素的产生机理和相应的防治办法、记录新 准素种类,以及利用生物医学和遗传机制来抑制毒素的产生和扩散。

1.3.4 赤潮的发生机制研究

未潮研究已经进行了30多年。研究手段和方法都有很大改进、也取得了许多成果。但在世 界范围内未潮发生机制方面的研究尚未取得重要突破(许卫忆等,2004)。

通常认为,赤潮的形成和发展是海洋生态系统中结构与功能处于同一生态位上的赤潮生 物在营养与生存条件竞争上处于优势时,种群得以充分发展,导致整个浮游生物群落向有利于 赤湖生物岛度增殖的方向演藝的--种极端自然理象(以十年等。1999)。

联合国政府间海洋委员会(Intergovernmental Oceanographic Commission, 简称 IOC)和海洋科

学研究委员会(Scientific Committee on Oceanic Research, 简称 SCOR)提出了全球赤潮生态学与海 洋学研究计划 GEOHAB (Global Ecology and Oceanography of Hamful Algal Blooms),该计划于2001 年和 2003 年分別提出了科学规划(Secance Plan)与行动计划(Implementation Plan)两份指导文件。 该计划认为赤潮的发生是两洋生态的问题,并受到海洋环境等各方面因素的影响,因此必须综合生物,化学和物理。方面因素系综合研究。这也是目前国际上对于赤潮发生机制的基本认识。Indirt 机特许名外国开除赤潮的研究方向。

住对于赤欄的安牛机制也存在著与传统理论不同的思路。许卫化等(2004)提出赤欄的安 生 与海区的富貴莽化之间不存在直接的关系。赤欄定生的主要因素是物理最樂而非异常增殖, 并以鱼加维的赤欄歐國法里班 [该显践的正确性。

总的说来,未潮发生的动力学机制是未潮研究的核心问题,也是最难攻克的堡垒。

1.3.5 赤潮的预测预警研究

近年来,由于素欄架生的頻率及規模不斷增加,造成了戶文的经济損失,并危害了人类的 生存环境,对其进行成功預測并进行对效的預实確实已成为社会的迫切需要(周期引1年, 2001),未開的預測預費研究对防治赤網,減少赤欄所造成的经济損失,保护人们的健康安全 起着重要的作用。由于近年来未攜的危害口趋严重,各回都加强了对于赤潮預測理论及預警 系统的研究。国内外学者从不均负度开展了赤褶的预测研究,并提出了众多的赤潮预测方法。 够採取来主要有经验预测数,转让行额款。却分全预测及另限的预测

经赊预测法是根据赤潮发生过程前后相关环境因子的变化规律来预测赤潮的发生,主要 包括单因子指数法和综合指数法。

单因子指數法包括物理参數法(水温、透明度、水色等)、化学参數法(DO、COD、pH 值、N 、P)以及生物学参數法(中缺薪 a. 華孝密度等)。

综合指数法是将相关度比较大的单因子指数综合起来形成一个综合的指数,考虑了多个 因素之间的概合作用 这些指数主要有。

统计预测模型是利用多元统计的方法对赤潮发生过程前后的数据资料进行分析处理,从 中得到"纯规律(关系),然后根据这些规律(关系)来预测赤潮的发生。常用的方法有回归分 析:主成分分析、聚类分析,因子分析等。

赤潮預測研究的一个重要方向就是动力学預測。该方法根据发生赤潮的种群的动力学机 刺和海洋物理环境,建立相关赤潮生消过程动力字板型,并利用各种数学工具对模型进行分析 和求解,了解动力学系统中的参数特性,对模型进行模拟和仿真,并在此基础上结合监测数据 进行预测。国内关于模型的研究从20世纪90年代才开始,中山大学的王寿松老师、暨南大学 的黄伟建和乔南寨老师等在这方面做了大量的工作(王寿松等,1997) 黄伟建等,1996)。

最近几年,随着计算机软件技术、人工智能以及生物技术的迅猛发展、人们开始探索将其应用于赤潮预测上,主要方法有人工神经网络(ANN)与模糊逻辑(FL)。

人工神经网络是模仿人的大脑神经元结构、特性和大脑认知功能构成的信息处理系统。

它具有以下几方面的优点:容易建立模型:能够快速反应,因此适用于实时监测和预报;具有学习,联键,容错,并行处理等种种能力,先其适用于机制尚不清楚的高维非线性系统的模拟(Lek and Guegan, 1999; Whitehead et al., 1997; Recknagel et al., 1997; French et al., 1998; Karul et al., 2003). Joseph et al., 2003

模糊逻辑可应用于复杂系统的模拟和预测(Coogala and Leski, 2000; Lin and Tsai, 2001)。初 期模糊逻辑主要应用于系统控制等模域(Von Altrock, 1995; Lin et al., 2001). 后来应用于植物动 力学研究上(Foody, 1996). 目前已经开始应用于赤椭预测方面(Recknagel et al., 1994; Los and Vonk, 1996; Shen and Chouchoules, 2001; Linu et al., 2001; Chen and Mynett, 2002)。

第2章 非线性动力学理论基础

非线性动力学是近年来国内外基础理论研究的熱点之一。本章简要介绍稳定性理论、分 **岔**混沌理论以及非线性随机动力学理论。

2.1 稳定性理论

2.1.1 引言

· 稳定性问题与常微分方程的稳定性问题密切相关,本节从以下一个简单的方程来阐述 · 些常微分方程的概念。

$$\frac{dy}{dt} = Ay - By^2 \tag{2-1}$$

其中 A, B 为常数且 $A \cdot B > 0$,初始条件为 $y(0) = y_0$ 。容易求得方程的两个常数解为

$$y_1(z) = 0$$

$$y_2(z) = \frac{A}{R}$$
(2-2)

当 y≠0 和 y≠点时,方程(2-1)可改写为

$$\frac{1}{y(A-By)}\mathrm{d}y=\mathrm{d}z$$

两边积分可求得

 $\ln|y| - \ln|A - By| = At + C$

这就是方程(2-1)的通解,其中 C 为任意常数。再利用初始条件可以确定 C,

$$C = \ln \left| \frac{\gamma_0}{A - B \gamma_0} \right|$$

这样就得到满足所给初始条件的原方程解为

$$y = \frac{A}{B + \left(\frac{A}{\gamma_0} - B\right)e^{-At}}$$
(2-3)

对应于初值的所有可能情况。式(2-3)的图像如图 2-1 所示。从图中可以看出,当 A>0.8 >0 时,满足初始条件, $y(0) = y_0>0$ 的所有解均衡近趋于解 $y_1(1) = A/B$,即该解是稳定的;而 其他情况下,方程解趋向于无穷,方程解不稳定。当 A<0, B<0 时,满足初始条件 $y(0) = y_0$ A/B 的所有解均衡近趋于解 $y_1(1) = 0$,即该解是稳定的;而其他情况下,方程解趋向于无穷,方理解不稳定。

2.1.2 稳定性的基本概念

1.解的稳定性的定义

考虑下列微分方程组

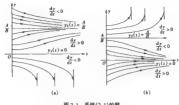


图 2-1 系统(2-1)的解 (a)A>0.B>0:(b)A<0.B<0

$$\gamma = F_i(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, t)$$
 $(i = 1, 2, \dots, n)$ (2-4)

其中 y, 是与运动有关的变量,例如位移、速度、加速度等, 函數 F_i ($i=1,2,\cdots,n$) 满足解的存在性和唯一性条件,其矢量操分方程形式为

$$y = F(y)$$

其中: $v = [v, v, \dots, v]^T$, $F(v) = [F, F, \dots, F]^T$ 为 n 维列向量函数。

在以后的讨论中总假定方程组(2-4)的右端 $F_1(y_1, \dots, y_n, t)$ 是在 n+1 维空间的某区域 D_1 内,目满足懈的存在唯一性定理,懈的延知与连续性定理以及可微性定理所要求的条件。

稳定性这个词最先出现在力学中,用来描述一个阐标运动的平离状态。如果说平衡状态 最近的,就是说刚体在受到干扰力的作用下从原来位置微微移动后,仍可回到它原来的位 量。反之,如果它治于一个新位置,这时的平衡状态就是不稳定的。

撤分方程描述的是物质系统的运动规律,但从实际问题中所提出的散分方程,通常只能考虑影响该过程的主要因素,而不得不忽略一些衣要因家,即于抗因素。 干扰因素可以瞬时地起作用,从数学上来看,前者引起初值的变化,而后者则引起微分方程本身的变化。因此,研究下注问题就有着性其深远的理论意义和现实意义。这就是,初始条件或微分方程本身的微小变化是否只引起对应解的微小变化。如果由于初始条件或微分方程"差之毫厘"却使对应的解"失之干里",那么这样的定解问题是然是没有什么实用价值的。

运动系统的输定性概念是平衡稳定性概念的直接扩大。李雅普诺大定义的运动稳定性理 论,是研究微小下批性因素对于物质系统运动的影响。而微小的干扰因素(或者说涨落)总是 存在的,且不可确定。

对于一些运动,微小干扰因素的影响并不显著,因而受干扰的运动与不受干扰的运动差别 很小,这类运动称为是稳定的,对于另外一些运动,无论干扰多么小,随着时间的皮肤,受干扰 的运动与不受干扰的运动相差很大,这类运动称为不稳定的。由于干扰总是不可避免的,所以 运动稳定性的问题就有其重要的理论和实际的意义,在自然科学与工程技术领域受到了人们 的普遍关注。

设式(2-4)在初始条件

$$y = y_0$$

 $t = t_0$

$$(2-5)$$

下的解为

$$y_i = y_i(t)$$
 $(i = 1, 2, \dots, n)$

选取此式为干扰运动,考虑其稳定性。设初始条件有微扰动

$$y = y + \eta = y_0$$

$$t = t_0$$

$$(2-7)$$

(2-6)

其中, 市为 市维扰动向量, 是一阶小量。此初始条件下的微分方程(2-4)的解为

$$y = y(t)$$
 (2-8)

定义 2.1 如果对于任意小的正數 ϵ , 总存在正數 $\eta(\epsilon)$, 使得对于所有受干扰的运动 $y_i=y_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$, 当其在初始时刻 $t=t_0$ 时搁足不等式

$$|y_i(t_0) - \bar{y}_i(t_0)| \le \eta(\varepsilon) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$
 (2-9)

而在所有 (≥ 4) 时,满足不等式

$$|y_i(t) - y_i(t)| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$
 (2-10)

剿未受干扰的运动就称为对变量是稳定的。

来受干扰的运动加展不是稳定的,就称为是不稳定的。即对任置正数,至少有一种受干扰 的运动,它搁足不夸式(2-9),但如果在某一大于。。时刻不夸式(2-10)不满足,那么未被扰动 的运动就是无稳定的。

的运动就是不稳定的。 若未被扰动的运动不但是稳定的,而且当初始振动足够小时,随着时间的增加,所有受干 批的运动都逐渐趋近于未受干扰的运动,在这种情况下,未被扰动运动是新近稳定的。

对于方程(2-4),研究新解 $y_i = y_i(t)$ 相对运动 $y_i(t)$ 的稳定性还很复杂。为此对方程(2-4)进行坐标变换

$$\begin{split} & x_i = y_i(t) - \hat{y}_i(t) & \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, n) \\ & \frac{\mathrm{d} x_i}{\mathrm{d} t} = \frac{\mathrm{d} y_i(t)}{\mathrm{d} t} - \frac{\mathrm{d} \hat{y}_i(t)}{\mathrm{d} t} \\ & = f_i[x_i + \hat{y}_i(t), \cdots, x_i + \hat{y}_i(t), t] - f_i[\hat{y}(t), \cdots, \hat{y}_i(t), t] \\ & = f_i(x_i, x_i, \cdots, x_i, t) \end{split}$$

U

$$\frac{ds_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$$
(2-11)

由于 f_i = 0 时, $y_i(t)$ = $y_i(t)$,所以方程(2-4)的未扰运动稳定性问题转化为方程(2-11)的 零解稳定性问题。

定义 2.2 对于任意正教,存在 $\eta(\epsilon)$ 使得对于受到干扰的运动,在初始时刻 ϵ_0 时满足 $|x_1(\epsilon_0)| \leq \eta(\epsilon_0 = 1, 2, \dots, n)$, 当 $> \epsilon_0$ 时,请足 $|x_1(\epsilon_0)| < \epsilon_0$ 则系统(2-11) 在平衡位置($x_1 = 0(\epsilon_0 = 1, 2, \dots, n)$) 是未稳定的。

如果未就运动 $(s_i = 0(i = 1, 2, \dots, n))$ 是稳定的,且有 $\lim_{r \to \infty} s_i(r) = 0(i = 1, 2, \dots, n)$ 成立,则称为县新近稳定的。

设非自治系统的扰动微分方程为

(2-16)

$$\dot{x} = f(t, x)$$
 (2-12)

在平衡位置 x=0 的邻域 $\Omega: \|x\| < H$ 内, 解存在且唯 , 其中 $\|x\| = (\sum_{i=1}^n z_i^2)^{i/2}$ 为歌氏范 数: 邻域 $\Omega: \|x\| < H$ 表示以原点为域心, H 为半径的域。

定义 2.3 「对任意 $\epsilon > 0$ ($\epsilon \subset H$), 可以找到 $\delta(\epsilon) > 0$, 使得当初始扰动 $\| x_0 \| < \delta$ 时对一切 t > 0.

$$||x|| < \varepsilon$$
 (2-13)

则称系统(2-11)在平衡位置 x=0 稳定。

定义 2.4 如果系统(2-11)在平衡位置 x=0稳定,且有

$$\lim \|x\| = 0$$

则称平衡位置 x=0 为新近稳定。

定义 2.5 如果系统(2-11)在平衡位置 x=0 为新近稳定,而 x_0 可以取任何值,则称平衡位置为全局新近稳定。

定义 2.6 存在一个 $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon \subset H$)、对于任意的 $\delta(\varepsilon) > 0$ 、当初始扰动 $\|x_0\| < \delta$ 时,存在 第一时刻 $\varepsilon > 0$.

称系统(2-11)在平衡位置 x=0 为不稳定。

2. 根平面上的考点及其确定性 定义 2.7 设系统的考点(平衡点、临界点)为 u_* , 若对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta(\varepsilon) > 0$, 使得 当 $\|u(0) - u_*\| < \delta(\varepsilon)$ 时,有 $\|u(t) - u_*\| < \varepsilon$ 对任意 $t \ge 0$ 成立、則称系統的考点 u_* 是職 定的,否則称为不稳定。 若奇点 u_* 是稳定的,且满足 $\lim_{t \to u_*} u_*(t) = u_*$,则称考点 u_* 是漸近稳定 的。

下面研究相平面上奇点的性质。考虑系统

$$\dot{u} = f(u) \tag{2-14}$$

其中

$$u = [x, y]^{\dagger} \in \mathbb{R}^2$$

如果系统的平衡点 u=u。不是原点(0,0),则可作线性变换:v=u-u,则式(2-14)变为v=f(v),此时系统的奇点已变为原点(0,0)。因此,本节着重讨论奇点为原点的振动系统。

设系统

$$\dot{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} = f(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} f_1(u_1, u_2) \\ f_2(u_1, u_2) \end{bmatrix}$$
(2-15)

的平衡点为 u = u, = 0。显然,系统(2-15)只是系统(2-14)的 · 个特例。

将系统(2-15)在 # = #, = 0 处泰勒展开,并忽略高次项,得

式(2-16)称为式(2-14)的线性化系统、写成向量形式为

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \tag{2-17}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ & & J \end{bmatrix}$$
 (2-18)

可以证明,当矩阵 A 的所有特征值都不具有零实部时,系统(2-15) 与其线性化系统(2-16) 任奇点附近具有相同的性态。故着重讨论线性系统(2-17),并假设此时矩阵 A 的所有特征值都不具有零实部。显然,此时 $det A \neq 0$,即 A 是非奇异的,由线性代数的知识可知,此时 A 的特征值A,和 λ_2 对应的特征向量或广义特征向量(当 $\lambda_1 = \lambda_2$ 时)G,和 G 可以组成一个可谓(生者)等。如称于G 等限件 G 等限件

$$u = Tv$$
 (2-19)

其中

$$\mathbf{w} = \left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right], \; \mathbf{v} = \left[\begin{array}{c} \zeta \\ n \end{array} \right], \; T = \left[\begin{array}{cc} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{array} \right]$$

可把线性方程组(2-17)化成标准形式,其系统矩阵为下列四种形式之一: $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$,

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}, 其中 \lambda_1, \lambda_2, \lambda, \alpha, \beta 为实数。$$

这些标准形式是根据方程组(2-17)的特征方程

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

即

$$\lambda^{2} - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$$
 (2-20)

的根(称为特征根)的性质来确定的。

由于线性变换(2-19)不改变奇点的位置,也不会引起相平面上轨线性态的改变,从面奇点 的类型也保持不变。因此,为了简单起见、下面设载标准形式的线性方程组介绍其奇点的类 型,至于一般为程组(2-17)在奇点邻域内轨线分布的面貌也同时附下相应的图中,以供比较。 現核特征方程具有相异实限,重根成失概复根,分5种情形进行讨论。

情形一 特征方程具有同号相异实根。

这时方程的标准形式为

$$\frac{d\xi}{dt} = \lambda_1 \xi$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \lambda_2 \eta$$
(2-21)

其解为

$$\zeta = Ae^{\lambda_1 t}$$

$$\eta = Be^{\lambda_2 t}$$
(2-22)

其中 λ_1 、 λ_2 为实特征根, 而A、B 为任意实常数。

首先假定 λ_1 , λ_2 同为负变数,此时易见,零解是渐近稳定的。当 B=0 时, ξ 的左半轴及右半轴本身为轨线;而当 A=0 时, η 轴的上半轴及下半轴为轨线。若 $A\cdot B\neq 0$,则可分 $\lambda_1>\lambda_2$ 和 $\lambda_1<\lambda_1$ 两种情况。

如果 λ, > λ2, 由解(2-22)有

$$\frac{\eta(t)}{r(t)} = \frac{B}{A} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty)$$

故轨线切 ζ 轴于原点。相平面上轨线的形状如图 2-2(a)所示。

如果 λ, < λ2, 则有

$$\frac{\zeta(t)}{\eta(t)} = \frac{A}{B} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty)$$

这表明轨线切 n 轴于原点。相平面上轨线的形状如图 2-2(b)所示。

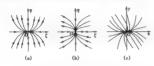


图 2-2 - 結点 (a)0 > λ₁ > λ₂(b)λ₁ < λ₂ < 0₁(c) - 般情况

从图 2-2 中可以看到,除个别轨线外,所有轨线均沿同一个方向趋向原点,其邻域内轨线 是有这样性态的奇点称为鳍直。

如上所述、λ、λ、同为负实数时、方程的零解是渐近稳定的、称对应的奇点为稳定结点。

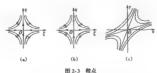
当 λ_1 、 λ_2 ,同为正实敷时,上述讨论仍然有效,只需将 $t \rightarrow + \infty$ 改为 $t \rightarrow - \infty$,即图 2-2 中轨 线的走向均须改为相反的方向,这时方程的零解为不稳定,而对应的奇点称为不稳定镝点。

情形二 特征方程具有异号实根。

这时方程的标准形式及其解的表达式仍为式(2-21)和式(2-22),不过其中 λ_1 和 λ_2 的符号相显。

式(2-22)中当 B=0 或 A=0 时,其轨线分别为 ζ 轴的左、右半轴或 η 轴的上、下半轴,且 其中一轴给于原点、另一轴远离原点。

当 $A \cdot B \times 0$ 时,如 $\lambda_1 < \lambda_2$,则由式(2-22)可知,当 $t \to + \infty$ 时, $\zeta(t) \to + 0$, $\eta(t) \to + \infty$,轨 数图版组图 $2 \cdot 3(a)$ 所示。如 $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$,当 $t \to + \infty$,则有 $\zeta(t) \to + \infty$, $\eta(t) \to 0$,轨线形状 的服 $2 \cdot 3(h)$ 所示。



(a)λ₁<0<λ₂;(b)λ₃>0>λ₂;(c) - 般情况

由图 2-3 可见,在奇点邻域内,方程的轨线图貌如鞍形,这样的奇点称为鞭点。显然,鞍点 只能是不稳定的。

情形三 特征方程具有重视。

这时可分两种情况讨论。

①当 b≠0 或 c≠0 时,如前面所指出的,这时方程可化为如下标准形式:

$$\frac{d\zeta}{dt} = \lambda \zeta + \eta$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \lambda \eta$$
(2-23)

其解为

$$\begin{bmatrix}
\zeta = (At + B)e^{it} \\
n = Ae^{it}
\end{bmatrix}$$
(2-24)

当 λ < 0 时,显然有 ζ (ι) → 0, η (ι) → 0(ι 0 + ∞),因而方程的零解是漸近稳定的。 又由式 (2-24)知,当 λ = 0 时, ζ 轴的左、右半轴本身也是轨线;而当 λ \neq 0 时,由于

$$\frac{\eta(t)}{\zeta(t)} = \frac{A}{At+B} \rightarrow 0 (t \rightarrow +\infty)$$

且当 t = - $\frac{B}{A}$ 时, $\zeta(t)$ = 0, 可知軌线總过 η 轴兩切 ζ 轴干原点、如图 2-4(a)所示。所有軌线毫 无例外地沿同一个方向(ζ 轴)趋于奇点,其附近軌线具有这种性态的奇点称为環化輸点。在 此情形下, 奇点是稳定的,因此格外穩定環化輸点。

若 $\lambda > 0$,这时只要将 $t \rightarrow + \infty$ 改为 $t \rightarrow - \infty$,则前面讨论仍然有效。 轨线性态如图 2-4(b) 所示,奇点是不稳定退化结点。



图 2-4 退化结点 (a) \(< 0: (b) \(> 0: (c) - 無情况

②当 b = c = 0 时,这时方程组(2-17)取形式

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \lambda x$$
, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \lambda y$, $\lambda = a = d$

其解为

$$x(t) = Ae^{it}, y(t) = Be^{it}$$

于是

$$y = \frac{B}{A}x$$

此时,轨线是趋向(或远离)奇点的半射线,如图 2-5 所示。轨线均沿确定的方向趋于(或远离)

图 2-5 奇结点

奇点,且不同轨线其切向也不尽相同,这样的 奇点称为奇结点,且 λ < 0 时为稳定的,而 λ > 0 时为不稳定的。

情形四 特征方程具有非零实部复根。

这时方程的标准形式为

$$\frac{d\zeta}{dt} = \alpha\zeta + \beta\eta$$

$$\frac{d\eta}{dt} = -\beta\zeta + \alpha\eta$$
(2-25)

这里 α 、 β 分别为特征根的实部和建部。引人极坐标、即令 $\zeta = r\cos\theta$ 、 $\eta = r\sin\theta$,再注意到

$$r^2 = \xi^2 + \eta^2$$
, $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = \frac{\zeta}{r}$, $\frac{\partial \eta}{\partial \eta} = \frac{\eta}{r}$
 $\xi d\xi + \eta \frac{\partial \eta}{\partial \eta} = r \frac{dr}{d\tau}$, $\xi \frac{d\eta}{d\tau} = \eta \frac{d\zeta}{d\tau} = r^2 \frac{d\theta}{d\tau}$

格式(2-25)代人上式,并整理可以得到

$$\frac{dr}{dt} = \alpha r$$
, $\frac{d\theta}{dt} = -\beta$

由此得到方程(2-25)的解的极坐标形式

$$r = Ae^{\alpha}$$

$$\theta = \Omega + B$$
(2-26)

其中 A>0 和 B 为任意常数。

从式(2-26)可直接看出,轨线为一族对数螺旋线,依顺(反)时针方向盘旋地趋近或远离原 点,如图 2-6 所示。此时,奇点称为焦点,且 α <0 时为稳定的,而 α =0 时为不稳定的。



图 2-6 焦点 (a)a < 0.8 > 0:(b)a > 0.8 > 0:(c)一般情况

情形五 特征方程具有纯虚根。

这相当于情形四中 $\alpha=0$ 的情形。易见这时赖线为以原点为中心的一族圈,如图 2-7 所示。此时,奇点称为中心,是然,在这种情形下零解为稳定但非晰近稳定的。

综上所述,可得下面定理。

定**理 2.1** 如果二阶线性方程组(2-17)的系數讓足条件式(2-18),則方程的零解(奇点)将依特征方程(2-20)的根的性质而分别具有如下的不同特性。

①如果特征方程的根 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为实根,则 $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ 时奇点为结点,且当 $\lambda_1 < 0$ 时结点是稳定的,而对应的零解为渐近稳定的,但当 $\lambda_1 > 0$ 时奇点和对应的零解均是不稳定的;当 $\lambda_1 \lambda_2 <$

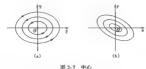


图 2-7 甲心 (a)a=0.8<0:(b) -解情况

0时奇点为鞍点,零解为不稳定的。

②如果特征方程具有重模 λ,则奇点通常为退化结点、但在 b = c = 0 的情形奇点为奇结 。又当 λ < 0 时,这两类结点均为稳定的,而罕解为蘅近稳定的,但当 λ > 0 时奇点和对应的 零额均匀不均定的。

③如果特征方程的根为共轭复根。即 λ₁ = λ₂,则当 Re λ₁ ≠ 0 时奇点为焦点,且当 Re λ₁ < 0 时焦点是稳定的,对应的零解为新近稳定的,而5 Re λ₂ > 0 时奇点和对应的零解均为不稳定的的,当 Re λ₂ = 0 即考点为中生新页稳定的。

上述奇点的类型和特征方程的根之间的关系还可以用图 2-8 清楚地表出。例如,设

p = -(a+d), q = ad - bc

而特征方程(2-20)写成

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

则可以利用方程的根 λ_1 、 λ_2 与系数 p、q 之间的关系、通过 λ_1 、 λ_2 为離介,在以 p、q 为直角坐标的平面(p,q) 上明确地划分出各类型奇点的分布区域、如图 2-8 所示(图中抛物线的方程为 p^2 -4q=0)。

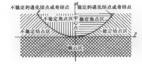


图 2-8 各类型奇点的分布区域

2.1.3 稳定性的判断准则

常系数微分方程组是最重要的一类常微分方程,其解可以通过初等函数表示。大量的工程实际问题可以近似地用线性系统理论来研究。

1. 一般理论

$$\frac{dx_{i}}{dt} = a_{ii} x_{1} + a_{i2} x_{2} + \cdots + a_{in} x_{n} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$
(2-27)

(2-33)

其拓旌形式为

$$\dot{X} = AX$$

$$\dot{X} = AX$$
 (2-28)
其中 $X = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T 为 n 维矢量、A 为(a_1) ___ 矩阵、方程组解的形式可设为$

$$X = b e^{\lambda t} \tag{2-29}$$

$$b = [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n]^T$$
 为 n 维矢量,代人式(2-28)得
(A - λI) $b = 0$ (2-30)

$$D(\lambda) = |A - \lambda I| = 0 \tag{2-31}$$

D(x)称为特征行列式。行列式展开后得相应的特征方程

$$f(\lambda) = \lambda^{n} + a_{1}\lambda^{n+1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_{n} = 0$$
 (2-32)

λ 为特征方程的特征根。它们的重数分别为 n₁, n₂, ··· , n_n , 称为对应特征值的代数重数。选 取非奇异拓胜 P 讲行线性变换 顺有

$$X = PY$$

代人式(2-28)得

 $P\dot{Y} = APY$

RO.

$$\dot{Y} = P^{-1}APY = JY$$

其中 I = P 'AP 与 A 相似, 具有相同的特征根及重数。不妨设 J 为若当型矩阵, 即

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I \end{bmatrix}$$

是对角型分块矩阵,非对角线上的元素为零,对角线上共 m 个非零子阵,每个子阵也是 n. × n. $(i=1,2,\dots,m)$ 阶的对角型分块子阵,即

$$J_i = \begin{bmatrix} J_{:i} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_{:i} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & J_{i_n} \end{bmatrix} \quad (\alpha_i \leqslant n_i \ (i=1,2,\cdots,m))$$

其中子阵

$$J_{K} = \begin{bmatrix} \lambda_{i} & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{i} & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{i} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{i} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix} \quad (K=1,2,\cdots,a_{i})$$

称为对应于特征根的者当块,有 n_{i1} + n_{i2} + ··· + n_{iq} = n_{i} , 特征值 λ , 共有 a, 个若当块; 1 ≤ a, $≤ n_{i}$, a , 然几何重要。 若 a = n_{i1} 即为对伯陈,代勒重教与几何重要相同。

2. 稳定性分析

①当 A 有 n 个互异单根时, J 为对角阵, 几何重数与代数重数均为 1, 则解的形式为

 $y_i = C_i e^{i\gamma}$ (2-34) 此时若 λ_i 具有正文部、无论 C_i 为何值。当 $z \mapsto \infty$ 时 $|y_i| \mapsto \infty$,平凡解是不稳定的; 若所有特征 依日本名的文雅 下公 C_i 为何值。当 $z \mapsto \infty$ 图 1 解 1 概则 1 第 1 能应则 1 第 1 能应则 1 第 1 能应则 1 第 1 能应则 1

值具有负实部,无论 C, 为何值,当 t→∞时1y,1→0,平凡解是渐近稳定的。 ②当 A 有重特征根时,且代数重数等于几何重数,J 仍为对角型矩阵,解的形式同式

(2-34) 稳定性分析结果同上, 若几何重數小干代數重數, 这时方程的形式为

$$\gamma_i = f_i(t)e^{\lambda_i t} \tag{2-35}$$

式中 $f_{i}(t)$ 的时间。的多项式。多项式的次数小下几何重数。由于指数函数的增大速度大于 再次数。这在特征值实际不为零时,能定性分析结果同日。。各有军实际特征强,此时因 $f_{i}(t)$ 为 时间。的多项式、故 f_{i} 一念时 $f_{i}(t)$ 是有约向于无穷的子列,所以系统平凡银代零额下路段。

又由于所做的变换是线件变换,所以式(2-27)和式(2-33)解的稳定性是等价的。

依据以上讨论,总结如下。

①若 A 的所有特征根都具有负实部(负实根或负实部的复根),则方程(2-27)的零解是新近确定的。即

 $\lim x_i(t) = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$

②若特征根中至少有一个具有正实部(即正实根或有正实部的复根),则方程(2-27)的零 解是不稳定的。

③若没有带正实部的根,但有实部为零的单根(零根或一对纯虚根),则系统的零解是稳定的,但非衡折稳定。

①若没有带正实部的根,但有多重零根或多重纯虚根,此时若每个重根的代數重數与几何 實數相等,則零解为稳定;若至少右一个重根的几何重數小于代數重數,則系统零解为不稳定。

3.雪尔维茨判据

由于特征根实部的符号在稳定性问题中有关键性的作用,这里列出 Routh-Hurwitz 判据,或 称霍尔维茨(Hurwatz)判据。它给出特征方程的根有负实部的充分必要条件。

方程(2-27)的零解的稳定性问题,可以归结为特征方程(2-32)

$$f(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (a_0 = 1)$$

$$\Delta_{1} = a_{1}, \Delta_{2} = \begin{vmatrix} a_{1} & 1 \\ a_{3} & a_{2} \end{vmatrix}, \Delta_{3} = \begin{vmatrix} a_{1} & 1 & 0 \\ a_{3} & a_{2} & a_{1} \\ a_{5} & a_{4} & a_{3} \end{vmatrix}, \cdots,$$

$$\Delta_{1} = \begin{vmatrix} a_{1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{3} & a_{2} & a_{1} & \cdots & 0 \\ a_{5} & a_{4} & a_{3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2} & a_{3} & a_{3} & a_{4} & \cdots & a_{5} \end{vmatrix}$$

$$(k = 1, 2, \cdots, n)$$

特征方程(2-32)的所有根据具有负实部,其充要条件是: $h = 1, 2, \dots, n$ 时, $\Delta_k > 0$ 成立(最后

的 Δ. > 0. 可用条件 a. > 0 代替)。

(2-36)

这个论断称为霍尔维茨判据,条件称为霍尔维茨条件。可以看出所有根具有负实部的必 要条件是。, $0(i=1,\cdots,n)$ 。 若其中。个系数是0或负数、则不再计算行列式的值了。 霍尔 维索条件在一个等价条件。为

 $\Delta_i > 0, k = 1, \dots, n \Leftrightarrow a_i > 0, i = 1, \dots, n \perp \Delta_{n-3} > 0, \Delta_{n-5} > 0, \dots$

另有一个充分条件

$$\Delta_k > 0, k = 1, \dots, n \leftarrow a, a_{k+1} \ge 3a_{k+1} \ge a_{k+2}$$

2.1.4 随机稳定性

由于非线性随机动力系统具有丰富而深刻的数学、力学及工程技术等实际应用背景、对其 稳定性、分弦问题以及混沌现象的研究已日益受到特学界的高度重视。对于随机动力系统、所 关注的是其平稳解的存在与合及其存在形式、这正如在研究确定系统时,人们更关注平衡点及 稳态幅一样、所以随机动力系统的稳定体格材对等面侧定义的。

考察随机动力系统的稳定性的一个重要方法是计算系统的 Lyapunov 指數。隨机系统的平 稳解几乎必然稳定的充分必要条件为最大的 Lyapunov 指數 $\lambda_{\infty} < 0$ 。

设定义在 \mathbb{R}^n 和 Wiener 空间(Ω , \mathcal{R} , P)上的非线性随机动力系统

$$\dot{X} = f(X, \dot{W}(z))$$

$$\dot{X}(z) = X$$
(2-37)

其中 $W(\iota)$ 为 m 维的 Wiener 向量过程, Ω 为样本空间、 $\mathscr R$ 是完备事件域, P 为 Wiener 測度; Wiener 測度 P 对 Ω 上的标准源移流(cunonical flow of shift $)(\theta_i)_{i\in \mathbb R}$ 是不变的(平稳的)和遍历的, 即 P 为 Ω 上的不变测度。

系统(2-37)的解社程 $X(t,\omega,X_0)$ 的概率分布函数和 Wiener 测度 P 共同合成了 $\phi(\omega,X)$ 的概率测度 μ,μ 在 Ω L的边缘分布为P,测度 μ 的不变性与 $X(t,\omega,X_0)$ 的平稳性完全等价。应当指出,无论随机流的定义还是 Oseledoc 定理均要求随机微分系统是平稳和通历的。其含义为要求随机系统在时间历程中和维本空间中对不同的维本点具有不变性。

式(2-37)以 $X(t_0) = X_0$ 为初始点的解过程 $X^0(t, X_0)$ 为平稳的,是指($X^0(t), W(t)$)为平稳过程。系统在平稳解 X(t)处的线性化系统记为

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{A}(\mathbf{Y}(t), \dot{\mathbf{W}}(t))\mathbf{Y}(t), \quad \mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}_0 \in \mathbf{R}^*$$
(2-38)

其中 $A(X(t), \zeta(t)) = \left[\frac{\partial f(X, \zeta)}{\partial X}\right]_{s,s}$ 为系统在 X(t) 处的 Jacobi 系统矩阵。此线性化系统产 牛的流 $Y(t, \omega)$ 与在 $x \in \mathbb{R}^s$ 处的线性化 $T_*(t, \omega, x)$ 是一致的。即 $T_*(t, \omega, x) = Y(t, \omega)$ 。

此线性化系统的最大 Lyapunov 指数定义为

$$\lambda(\omega, x, Y) = \lim_{t \to \infty} \frac{\ln \|Y\|}{t}$$
(2-39)

它表示在 x(t)处 Y 方向的 Lyapunov 指數。Lyapunov 指數的作用类似于矩阵 $A(X,\zeta)$ 特征值的实部、所以 $\lambda(\omega,x,Y)$ 可以作为界定线性化系统几乎必然稳定的条件。

在 Oseledec 于 1968 年提出了著名的乘法遍历定理后,人们才真正认识到了 Lyapunov 指數 在研究非线性动力系统中的重要性。 计算系统(2-38)的最大 Lyapunov 指數的方法是多样的,有 Monte-Carlo 模拟等方法,而较常用的方法是利用系统的不变测度进行计算。许多学者采用了各种不同的技巧案计算,如奇异摄功法。题相平均法、特征函数法、线性变换法、多尺度法以及新近分析法等。 园外学者 Khasminsky、Amold、Nanaschivaya、Pardeux、Ariaratnam、国内学者刘先斌、戎海武等在这方面都做了大量的研究工作。

以下举例简述计算 Lyapunov 指数的过程。

对于二维随机非线性动力系统(Stratonovich 意义下)

$$dX(t) = ef(X, t)dt + \epsilon^{\frac{1}{2}}g(X, t)d^{\alpha}Y(t)$$
 (2-40)

其中 X(t)为二维随机变量,Y(t)是一个 m 维的具有零均值的平稳随机过程,且为宽带过程, d· Y(t)表示 stratonovich 意义下的微分。 先作变量代换: $x_1=a\cos\theta$, $x_2=a\sin\theta$, 特系统转化为

$$\begin{bmatrix} da \\ d\theta \end{bmatrix} = \varepsilon f \begin{pmatrix} a \cos \theta \\ a \sin \theta \end{pmatrix}, t dt + \varepsilon^{\frac{1}{2}} d \begin{pmatrix} a \cos \theta \\ a \sin \theta \end{pmatrix}, t d \cdot Y(t)$$
(2-41)

经过随机平均后得到的 10 随机微分方程(其极限扩散过程满足的方程),系统(2-41)的响应过程 $|a(t),\theta(t)|$ 弱收敛于一个二维 Markov 扩散过程,并满足

$$\begin{bmatrix} da \\ d\theta \end{bmatrix} = \epsilon m \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} a \\ \theta \end{bmatrix} \end{bmatrix} dt + \epsilon^{\frac{1}{2}} \sigma \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} a \\ \theta \end{bmatrix} \end{bmatrix} dW(t)$$
(2-42)

其中 $\mathbf{w}\left(\begin{bmatrix} a \\ \theta \end{bmatrix}\right)$ 为二维向量函数, $\mathbf{\sigma}\left(\begin{bmatrix} a \\ \theta \end{bmatrix}\right)$ 为 2 × 2 阶矩阵, $\mathbf{W}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1(t) \\ \mathbf{W}_2(t) \end{bmatrix}$, 其中 $\mathbf{W}_1(t)$ 、 $\mathbf{W}_1(t)$ 为相互独立的零均值标准 Wiener 过程。

①当 σ 为对角阵且m的两个分量依次为 α 、 β 的一元函数时,名 $\begin{bmatrix} a \\ \hat{\theta} \end{bmatrix}$ 为系统(2-42)的平稳解,则作变换 $\alpha = \bar{\alpha} + u$ 、 $u = e^a$ 、应用 1n 微分法则,就可计算出一维过程 α (i)的 Lyapunov 指数,从而可以得到二维随机非线性动力系统在平衡解 α (α^i , α^i , α^i) 业的稳定性。

②情况①不出现时,可以考虑其他计算二维或高维 Lyapunov 指數的算法,如 Amold 漸近分析法 特征 函數法等等。

2.2 分岔理论

分岔理论是近代非线性动力学理论的基本内容之一。本节首先介绍分岔的基本概念,然 后简要介绍分岔的举列,最后介绍随机分岔理论。

2.2.1 分岔的基本概念

1.结构稳定性

在研究分估之前,先介绍系统的结构稳定性。结构稳定性是指动力系统受到扰动后,其拓扑结构保持不变的性质。结构稳定性理论与分岔理论有着密切的关系。

定义 2.8 设 f 是微分流形 M 上的 C^{ϵ} 向最场, 若存在 $\epsilon > 0$, 使得在 f 的某邻域 $B_{\epsilon}(f)$ 中的 任何 C 向景场。据与 f 拓扑等价、则政向景场 f 景 C 结构稳定的: 否则,称 f 为 C 结构不稳 定的。

记 U 上全体 C' 向量场的集合为 $e^{i}(U)$, U 上全体 C' 微分同胚的集合为 Diff(U), 则有下 面关于平面向最场的结构稳定性的重要定理。

定理 2.2 安徽罗洪夫 - 唐特里達全定理 记平而单位 獨然 $B^2 = \{(x,y) | x^2 + y^2 \le 1\}$ 。 考虑系统

$$\dot{x} = P(x, y)
\dot{y} = Q(x, y)
(x, y)
(x, y)
(x, y)
(2-43)$$

设函数 $P, O \in C^1(B^2, \mathbb{R})$ (即向量场 $(P, O) \in s^1(B^2)$),且向量场(P, O)与 B^2 的边界 ∂B^2 是 无切的,则系统为结构稳定的充要条件是:

①系统有有限个平衡点和闭轨,日它们都是双曲的;

②系统不存在从勤点到勤点的轨线。

该定理可推广到二维可定向的紧流形 M2(例如 g3 中的球面和环面等)上的系统,此时有 以下定理。

定理 2.3 皮都固定理 设 M^2 是二维可定向的紧流形, $f \in \mathbb{R}^1(M^2)$. 则向量场为结构稳 定的充要条件是。

- ①系统有有限个平衡占和闭轨, 日它们都是双曲的:
- ②系统不存在从据占到数占的轨线:
- ③此系统的非游荡集仅由平衡点和闭轨组成。

定理 2.4 皮都周期密性定理 设 M2 是二维可定向的繁流形,记 m2 (M2)中一切结构稳 定的向量场构成的子集为 Σ ,则 Σ 在 $e^{I}(M^{2})$ 中是开且稠密的。

皮都图稠密性定理表明:在 gl (M2)中、结构稳定系统是非常普遍的、即使是结构不稳定 的系统、也可以用结构稳定的系统任意地逼近。为了进一步说明,这里引人通有性的概念。

定义 2.9 设 V 县一度量空间, S 是 V 的一个子集, 如果 S 是可数个在 V 中稠密的开子集 的交, 则称 S 是一个剩余集或余集。

定义 2.10 若在 e1(II)(或 Diff(II))中。满足某个性质 P的向量场(或微分同胚)的集合 是一个剩余集,则称性质 P 是通有的:若满足某个性质 P 的向量场(或微分同胚)的集合的补 黎县—个剩余集,则称性质 P 是退化的。

由通有的定义和皮秘图定理可知,在向量场的集合 e¹(M²)中,结构稳定性是通有的,而 结构不稳定性是很化的。

2. 分分的基本概念

分岔理论研究非线性常微系统由于参数的改变而引起解的不稳定性从而导致解的数目的 变化行为。如果一个动力系统是结构不稳定的,则任意小的适当的扰动都会使系统的拓扑结 构发生突然的质的变化,这种质的变化称为分岔。

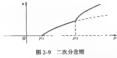
下面绘出分岔的数学定义。

定义 2.11 考察系统

其中 $x \in U \subset \mathbb{R}^n$ 称为状态变量, $\mu = [\mu_1 \cdots \mu_n]^T \in J \subset \mathbb{R}^n$ 称为分岔参数,则对固定的 μ ,

 $f(x, \mu) \in \mathbb{R}^l(U)$ 。当参数 μ 连续变动时、系统的拓扑结构在 $\mu_0 \in J$ 发生突然变化、则称系统 在 $\mu = \mu_0$ 处出现分岔、并称 μ_0 为一个分岔值。在参数 μ 的空间中,由分岔值组成的集合称 为分余集。

为了清楚地表示分估情况,在(x, µ)空间中画出系统(2-44)的极限集(如平衡点、极限环等) 肺参数 u 变化的图形,称为分数图。



 $D = \{f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) | f \in \omega^{\perp}(U), \boldsymbol{\mu} \in J \subset \mathbb{R}^n \}$

需要指出的是,在分岔参数的变化范围 内,系统可能在不同的参数值处相继出现分 岔,如图 2-9 所示,系统在 $\mu = \mu_1$ 处从基本解 来=0 分岔出初级分岔解,接着在 $\mu = \mu_2$ 处又 从初级分岔解分分出二级分岔解。

现在考虑 æ'(U)中所有含 m 个参数的向量场组成的子集:

定义 2.12 设 $\mu_0 \in J$ 是 $f \in D$ 的一个分岔值, 若存在 $f(x,\mu)$ 的某个邻域 $\mathbf{W} \subseteq D$. 使得对于任意 $g \in \mathbf{W}$ 存在一个同胚 $h: U \times J \cdot U \times J$. $(x,\mu) \mapsto (y(x,\mu), v(\mu))$, 它把向量场 $f(x,\mu)$ 的轨线映为向量场 g(y,v) 的轨线,并保持时间定向,则称 $f \in \mu_0$ 处的分岔为通宵的;否则 称 $f \in \mu_0$ 处价分岔为通径的。

下面研究平面向量场的分岔。由安德罗诺夫 - 庞特里雅金定理可得到下面的定理。

定理 2.5 在 æ¹(B²)中出现分岔的充要条件是下面条件之一:

- ①存在非双曲平衡点;
- ②存在非双曲闭轨:
- ③存在固宿或异宿熟线。
- 最后,分岔问题的主要内容可归纳如下:
- ①分岔集的确定(即分岔的必要条件和充分条件的研究);
- ②当分岔出现时系统的拓扑结构随参数变化的情况(即分岔的定性性态的研究);
- ③分岔解(尤其是平衡点、极限环等)的计算;
- ④不同分岔的相互作用,以及它们与动力系统的其他现象(如镀相、混沌等)的关系。

2.2.2 分岔的类型

根据研究的侧重点不同,可以将分岔划分为多种类型。这里介绍主要的几种划分方法。

- (1)按照系统是否显含时间 : 划分
- 按系统是否显含时间:划分,分岔可分为自治系统分岔和非自治系统分岔。目前主要的 分岔理论都是针对自治系统分岔问题的,对非自治系统的分岔问题,一般是先构其化为自治系统,再进行研究。具体做法有3种:
 - ①直接把时间 4 看作参数, 增补一个方程 i = 0, 则系统成为自治系统;
- ②对周期性的时间项,可以运用平均化方法,在一个周期内对其进行平均,从而得到新的 平均后的自治方程;
- ③对特别简单的周期性的时间项(如 cons auf, sin ouf),可以使用升维法,即直接增补两个系统 方程 u = our, v = ous,则立即可知 u = sin ouf,用 u 替换系统方程中的 sin ouf 后即得自治方程。

(2)按照所研究的分分的空间域划分

按所研究的分岔的空间域划分,分岔可分为局部分岔和全局分岔。只研究在平衡点或对 轨的某个邻域内的向置场的分岔称为局部分岔、考虑向量场的全局特性的分岔称为全局分 岔。一般来说,且前主要的理论分析都只集中于局部分岔,而全局分岔除了依靠数值计算外, 主要依靠根据相空间里各平衡点或闭轨的局部分公特性得出轨线的局部流向,然后进行综合、 以推测出相空间空局的轨线特差。

(3)按照研究对象划分

按關研究对象划分。分分可分为确本分分和动态分分。确实分分是研究确实方程

 $f(x,\mu) = 0 \tag{2-45}$

解的数目随参数 μ 变动而发生的突然变化、其中 $f: U \times J \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 。 定义 2.13 设 $(x_0, \mu_0) \in U \times J$ 是系统(2-45)的平衡点、取点 (x_0, μ_0) 的某个足够小的邻

定义 2.13 设(x_0 , μ_0): $U \times J$ 是系统(2-45)的平衡点、取点(x_0 , μ_0)的某个足够小的邻域 $\Omega \in U \times J$, $i : n(\mu)$ 为当 μ 固定时系统在 Ω 内的解的数目, 若当 μ 经过 μ , μ , $n(\mu)$ 突然 发生变化、则称(x_0 , μ_0) 为一个静态分位点(x_0 , μ_0) 附近、系统的解(x, μ)的某个称为f 的静态分位面变毫点源。

上式的解对应系统的平衡点,因此静态分岔属于平衡点分岔的研究范围。根据隐函数定 理,可推出静态分岔的必要条件。

间时还有如下定义。

定义 2.14 若在点 $(x_0, \mu_0) \in U \times J$ 处有 $f(x_0, \mu_0) = \emptyset$. 且 $Df(x_0, \mu_0)$ 是奇异的,则称 (x_0, μ_0) 为问量场 $f(x, \mu_0)$ 的一个奇异点。

这里定义的奇异点与2.1.2 节定义的相平面上的奇点(平衡点、临界点)不同,奇异点一定 是奇点,但反之不一定成立。

动态分岔是研究系统的拓扑结构发生的突然变化。解的数目的变化也属于系统拓扑结构 的变化、因此动态分岔包括了静态分岔。

(4)按照系统的维数划分

按照系统的维数划分,分岔可分为一维分岔和多维分岔。一维分岔是指一维系统的分岔 行为,即

 $f(\mathbf{z}, \mu) = 0$ (2-46) 其中 $f: U \times J \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R} + \mathbf{R}$ 。常见的一维分岔有 3 种,鞍结分岔、跨临界分岔和叉形分岔。多维

其中 f: (v × J C R × R * R 。 常见的一维分岔有 3 种, 鞍结分岔, 跨临界分岔和 V 形分岔。 多维 分岔是指多维系统的分岔行为。 多维系统的分岔行为 + 分复杂, 这方面的研究— 直是国内外 学者的研究重点。

(5)按照系统的余维数划分

按照系统的余维数划分,分岔可分为余维1分岔和高余维分岔。余维1分岔共有4种,包括3种,维分岔(版结分岔,跨临界分岔和叉形分岔)利1种二维分岔(hopf分岔)。余维数≪3的分岔类型共有17种。高余维(余维数大于3)系统的分岔问题是奇异性理论研究的主要内容,也是国内外的研究重点之一。

此外,对于单参数 μ 的平面自治系统:

$$x = P(x, y, \mu)$$

$$\dot{y} = O(x, y, \mu)$$

$$(2-47)$$

其中 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,已经取得了比较完整的研究结果。设 μ_0 是一个分岔值,其分岔类型可分为 3 大举。

(1)平衡点有关的分岔

设当 $\mu = \mu_0$ 时,系统有非双曲平衡点 (x_0, y_0) ,令 A 为 $\mu = \mu_0$ 时系统在 (x_0, y_0) 处的线性 化矩阵,则:

①若 A 有零特征值、则有高阶平衡点分岔。 如图 2-10(a) 所示、当 $\mu = \mu_0$ 时系统有 · 个 被结点(z_0 , y_0),当 $\mu < \mu_0$ 时无平衡点、面当 $\mu > \mu_0$ 时有 · 个鞍点和 · 个结点、这种分岔称为 鞍结分岔。

②若 A 有一对蛇腹特征值,且当 $\mu = \mu_0$ 时 (x_0, y_0) 是系统的细焦点,则当 μ 变化时,就可能从平衡点产生极限环,称为 Hopf 分卷。如图 2 - HO(b)所示,当 $\mu = \mu_0$ 时系统有稳定组点(特别地、) $\mu = \mu_0$ 时为稳定组版点),在它附近 无闭锁、" $\mu > \mu_0$ 时此平衡点变为不稳定焦点,在它附近 $4 - \mu_0$ 时,此限限不趋于率衡点

③若A有一对纯建特征值、凡当 $\mu = \mu_0$ 时(z_0 , y_0)是系统的真中心,即在(z_0 , y_0)附近全是闭轨、则当 μ 变化时,有可能从其中的某些闭轨分岔出极限环,而平衡点也不再是中心了。 这种分岔称为庞加莱分岔。

(2)闭轨分岔

设当 $\mu = \mu_0$ 时系统有作双曲闭轨 Γ_0 利用周期解稳定性定理知,此时周期轨道 Γ 的特征 指数 $\oint_\Gamma duv(P,Q)dr = 0$,即 Γ 起多重环, 当 μ 变化时,系统可能出规闭轨突然产生或消失的 现象,称为多重环分态。如图 2-10(c)所示、当 $\mu = \mu_0$ 时系统有一个二重平稳定极限环、当 μ $< \mu_0$ 时无闭轨,间当 $\mu > \mu_0$ 时有两个极限环。当 $\mu + \mu_0$,时这两个极限环趋于一个环。这种 分效象为二重单路环分态。

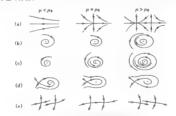


图 2-10 单参数平面自治系统的分岔类聚 (a)鞍结分岔;(b) Mapt 分岔;(c) 二重半稳环分岔;(d)阿宿執线分岔;(e) 异宿轨线分岔

(2-50)

(3) 同宿或异宿轨线分岔

设当 $\mu = \mu_0$ 时系统有同宿轨线,则当 μ 变化时,此同宿轨线可能突然消失,或从此同宿轨 线中分岔出极限环,如图 2-10(d)所示。这种分岔称为同宿轨线分岔。

设当 μ = μ₀ 时系统有异宿轨线,则当 μ 变化时,此异宿轨线可能突然消失,或从几条异宿 轨线相连面房的昆容环中分分出播展环 如图 2.10(a) 所示。这种分分数为昆容轨线分分。

上述分岔中,高阶平衡点分岔、据普夫分岔、多重环分岔属于局部分岔,而同宿或异宿轨线 分岔属于全局分岔。

需要指出,根据皮郝图定理,可以将上述结果推广到一维可定向的繁流形 M² 上的向量场的分价。

2.2.3 基本的一维分岔类型

下面介绍常见的3种·维分岔,它们都是静态分岔,也都是余维1分岔。这些研究结果在以后经常要用到。

考慮系统

$$f(x, \mu) = 0$$
 (2-48)

$$f(x, \mu) = a\mu + \frac{1}{2}bx^2 + cx\mu + \frac{1}{2}d\mu^2 + \frac{1}{6}cx^3 + \cdots = 0$$
 (2-49)

其中 $a = D_{sf}(0,0)$, $b = D_{ss}(0,0)$, $c = D_{ss}f(0,0)$, $d = D_{ss}f(0,0)$, $e = D_{ss}f(0,0)$, \cdots ; 并定义 $\Delta = -\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = b^{1} - ac$. 则随着系数 a,b,c,\cdots , Δ 的不同, 会发生不同的分岔。

1. 鞍结分岔

若方程(2-49)满足非退化条件:

a=0.b=0

则原点(0.0)为鞍结点,在该点的邻城内,方程(2-49)有解曲线

$$x = \pm \sqrt{\frac{-2a\mu}{k}} \tag{2-51}$$

则 n(u) 在 u=0 左右发生从 2 到 1 再到 0 的变化。

例 2.1 考慮系统

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu - x^2$$
(2-52)

的平衡解和稳定性。

解,系统的平衡方程为

$$f(x,\mu) = \mu - x^2 = 0$$

由此得解曲线:

$$x = \begin{cases} \pm \sqrt{\mu} & (\mu \ge 0) \\ \pm \sqrt{\mu} & (\mu < 0) \end{cases}$$

此外,在解曲线 $x = \pm \sqrt{\mu} L$.有

$$D.f(x, u) = -2x = \mp 2\sqrt{u}, u \ge 0$$

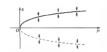


图 2-11 鞍结分岔

因此、解曲线 $z = \pm \sqrt{u}$ 的 $| + \pm \pm \hat{u}$ 的 $| + \pm \hat{u}$ 的 分分图如图 2-11 所示。

2. 装飾界分岔

差方程(2-49)満足

即原占(0.0) 称为晚临界分分占, 在该占的邻域内, 方

程(2,49)右两条相交的解曲线

$$x = \frac{-c \pm \sqrt{\Delta}}{\mu} + O(\mu^2) \tag{2-54}$$

则 $n(\mu)$ 在 $\mu=0$ 左右发生从2到1再到2的变化。

$$\dot{x} * f(x, \mu) = \mu x - x^2 \tag{2-55}$$

的平衡解和稳定性。

解:系统的平衡方程为 $f(x, u) = ux - x^2 = 0$

由此得解曲线:x=0和 x= x。

此外,在解曲线上,有

$$D_{x}f(x,\mu) = \mu - 2x$$

对于解曲线 x=0, 有 $D_xf(x,\mu)=\mu-2x=\mu$, 故 当 u < 0 时平衡点新近稳定; u > 0 时不稳定。 而对于解曲线 x = u, 有 $D_x f(x, u) = u - 2x =$ - u,故当 u>0时平衡点渐近稳定; u<0时不 稳定。分分图如图 2-12 所示。



图 2-12 跨临界分分

3. 叉形分岔 若方程(2-49)満足

$$a = 0, b = 0$$
 (限定条件)
 $c \neq 0, e \neq 0$ (非退化条件) (2-56)

则原点(0,0)称为叉形分岔点。在该点的邻域内,方程(2-49)有两条相交的解曲线,即

$$x = \frac{-d}{2c}\mu + O(\mu^2) \Re \mu = -\frac{e}{6c}x^2 + O(x^3)$$

则 $n(\mu)$ 在 $\mu=0$ 左右发生从 1 到 3 的变化。

例 2.3 考虑系统

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu x - x^3$$
 (2-57)

的平衡解和稳定性。

解:系统的平衡方程为

$$f(x,\mu) = \mu x - x^3 - 0$$

由此得解曲线 x=0 和 $x=\pm\sqrt{u}$, u>0。

此外,在解曲线上,有

$$D.f(x, \mu) = \mu - 3x^2$$

对于輸出敘 z=0, 有 $D_{\delta}(x,\mu)=\mu-3s^2=\mu$, 故 $^4\mu$ <0 时平衡点 新近稳定; $\mu>0$ 时不稳定。 面对于 物出线 $x=\pm\sqrt{\mu}$, $\mu>0$, 有 $D_{\delta}(x,\mu)=\mu-3s^2=-2\mu$ <0, 故稳定。 分岔图如图 2 -13 所示。 这种又形分岔的 特点是在 $\mu>0$ 时出现非平凡解 $(x=z(\mu)\neq0)$, 或者 说非平凡解对应的参数大于蜗界值 $\mu=0$, 故称为超能 果実務分念。



图 2-13 超临界叉形分岔

例 2.4 考虑系统

$$\dot{x} = f(x, \mu) = \mu x + x^3$$

(2-58)

的平衡解和稳定性。 解:系统的平衡方程为



图 2-14 亚临界义形分岔

由此得解曲线:z=0 和 $z=\pm\sqrt{-\mu}$, $\mu \leq 0$ 。

此外,在解曲线上,有
$$D.f(x,u) = u + 3x^2$$

対于解曲线 x=0, 有 $D_j(x,\mu)=\mu+3x^1=\mu$, 校当 $\mu<0$ 助平衡点新近稳定; $\mu>0$ 时不稳定。而 対下解曲线 $x=\pm\sqrt{-\mu}$, $\mu\leqslant0$, 有 $D_j(x,\mu)=\mu+3x^2=-2\mu>0$, 故不稳定。 分岔 附如图 $2\cdot14$ 所示。 は神叉形分岔的特点是在 $\mu<0$ 时出現非平凡解 $(x=x(x)\mu0)$, 或者说非平凡解对应的参数小干临界

值 μ=0,故称为亚临界叉形分岔。

2.2.4 Hopf 分岔

考虑单参数系统

$$\dot{x} = f(x, \mu)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^*$, $\mu \in \mathbb{R}_*$ 。设 $f(x_0, \mu) = 0$.即对 ·切 μ , (x_0, μ) 都是平衡点, 且当 $\mu = \mu_0$ 时, $D_f(x_0, \mu_0)$ 有 ·对纯虚共规特征值, 而其他 n = 2 个特征值有非常实部,则 (x_0, μ_0) 是一个非双曲平衡点, 故结构不稳定。由中心流形定理知,当 $\mu = \mu_0$ 时, 系统在平衡点有二维中心流形, 因此可以利用中心流形方法把 n 维系统的分岔同题化为 :维系统的分岔问题去讨论。为不失一般性,取 $(x_0, \mu_0) = (0, 0)$ 。

设经由中心流形方法化简得到的二维系统为

$$\dot{x} = f(x, \mu), x \in \mathbb{R}^2, \mu \in \mathbb{R}$$
 (2-59)

将其泰勒展开得

$$\dot{x} = A(u)x + f_2(x) + f_3(x) + h_1o_1 f_2^{(0)}, x \in \mathbb{R}^2, u \in \mathbb{R}$$
 (2-60)

其中

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, D f(x, \mu) = A(\mu) = \begin{bmatrix} d\mu & -(q\mu + \omega) \\ q\mu + \omega & d\mu \end{bmatrix}, A(0) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f_1(x) = \begin{bmatrix} a_2 x_1^2 + a_1 x_1 x_1 + a_0 x_2^2 \\ b_3 x_1^2 + b_1 x_1 x_2 + b_3 x_2^2 \end{bmatrix}, f_2(x) = \begin{bmatrix} a_2 x_1^2 + a_1 x_1 x_2^2 + a_0 x_1^2 \\ b_3 x_1^2 + b_3 x_1^2 x_2 + b_0 x_1^2 \end{bmatrix} + b_3 x_1^2 x_2^2 + b_3 x_1^2 x_1^2 + b_3 x_1^2 x_1^$$

c、d 分别为雅可比矩阵 $Df(x,\mu)$ 的特征值 $\lambda(\mu) = \sigma(\mu) \pm i\beta(\mu)$ 的虚都和实部在(0,0)点的 导教值. 即 $c = \beta'(0)$ 、 $d = \sigma'(0)$ 。

定理 2.7 Hopf 分岔定理 设系统(2-59)满足:

① $f(0, \mu) = 0$, 且(0,0)为系统的非双曲平衡点;

② $A(\mu) = D.f(0,\mu)$ 在 $\mu = 0$ 附近有一对复特征值 $a(\mu) \pm i\beta(\mu)$ 。

当 $\mu = 0$ 时 $\alpha(0) = 0$, $\beta(0) = \beta_0 > 0$, 且 $d = \alpha'(0) \neq 0$, 即当 $\mu = 0$ 时 $\alpha(\mu) + i\beta(\mu)$ 横穿虚轴,则存在 $\epsilon_0 > 0$ 和一个解析函数

$$\mu(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \varepsilon^i \qquad (2-61)$$

当 $\mu = \mu(\varepsilon) \neq 0$ (其中 $\epsilon \in (0, \epsilon_0)$)时、系统在原点的充分小邻域内有唯一的闭轨(即周期解) Γ_ϵ ,该周期解的解析表达式为

$$x(s, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i(\varepsilon) \varepsilon^i$$
 (2-62)

其中 $s = \frac{2\pi}{T}t$ 。解的周期

$$T(\varepsilon) = \frac{2\pi}{\beta_c} (1 + \sum_{i=1}^{n} \tau_i \varepsilon^i) \qquad (2-63)$$

当 ϵ →0 时, μ (ϵ) \bullet 0, Γ , <u>約</u>于原点。记 μ ₀为展开式(2-61) 中等 · 个不为 0 的系数, 則当 μ ₁ 与 d 同号时, Γ , 是稳定极限环; 当 μ ₁ 可 d 异号时, Γ , 是不稳定极限环。

还可以讨论极限环的产生条件: 当 $\mu_{\mu}>0$ 时, 由式(2-61)知, 有 $\mu(\varepsilon)>0$ 。 故当 $\mu<0$ 时不可能有 $\mu=\mu(\varepsilon)$, 因此不会产生极限环。只有当 $\mu>0$ 时才可能有 $\mu=\mu(\varepsilon)$, 从而产生唯一的极限环。 $\mu_{\mu}<0$ 时常况正好相反: $\mu>0$ 时无极限环, $\mu<0$ 时有唯一的极限环。

上述这种当分岔参数变化时系统从平衡点产生极限环的分岔现象称为 Hopf 分岔。特别

① h.o.t = high order tram(高路県)

下面研究通有的 Hopf 分岔。由 Hopf 分岔定理可知,极限环 Γ , 的稳定性取决于系数 μ_{β} 。 对于式(2-61) 和式(2-63),可以证明,当 $_{f}$ = 2 时,有第 $_{g}$ 和系数 μ_{2} = $_{d}$ 、 τ_{2} = $_{h}$ = $_{h}$ + $_{h}$ μ_{2} C 。 此时 $_{d}$ $_{d}$ = 0. 故有 $_{\mu_{2}}$ %0. 由 $_{\mu_{3}}$ 的定义知,这时 $_{\mu_{3}}$ 就是 $_{\mu_{2}}$ 。此时 Hopf 分岔定理中关于 极限环的趋空性 判据可以表计如下。

推论 2.1 若系统满足定理 2.7 的条件,且有 $a_1 \neq 0$,则周期解式(2-62)的稳定性由其范式系数 a_1 决定;如果 $a_1 < 0$,周期解是稳定的;如果 $a_1 > 0$,周期解是发散的。

若将推论 2.1 与上述极限环产生条件结合起来,可以得到下面的结论。

推论 2.2 若系统满足定理 2.7 的条件,且有 $a_1 \neq 0$,则当 $a_1 d_{\ell\ell} < 0$ 时系统产生极限环,且 其稳定性与此时的平衡点 $(0, \mu)$ 的稳定性相反。

225 随机分岔

确机动力系统主要研究动力学系统在非确定性激励(包括外部激励和参数激励)作用下的 响应特征。在建立数学模型(动力系统)过程中,系统所受的各种非确定因素可由随机变量或 随机过程表示、系统的动力学特性可用概率密度函数或统计特征量描述。随机振动研究是在 20世纪50年代初根据航空航大工程的需要而发展起来的、早期分析方法是从控制理论移植 讨来的。20 世纪 60 年代初非线性随机振动开始受到重视,扩散过程方法和随机微分方程方 法相继被引入随机振动分析。如今随机振动理论和方法已得到很大的发展,广泛应用于航空、 航天, 运输, 能凝, 建筑、环境工程、经济、管理等领域, 已成为可靠性设计的重要基础。现在 用于含有常参数的线性系统随机响应的频域法和时域法已经比较成熟:但对于非线性或变参 数随机动力系统, 求解扩散过程的转移概率密度函数仍为最常用方法, 它可归结为求解相应的 FPK 方程的问题。目前只有某些特殊的一阶非线性系统才能得到 FPK 方程的精确解,对高阶 稳态 FPK 方程在基些特殊的限制条件上也有精确解,此外还有一些关于 FPK 方程的近似解法 和數值解法。在计算非线性随机系统和参数随机系统的精确解时常会遇到较大的困难。所以 人们发展了一些近似方法,其中最有代表性的是等效线性化法、统计线性化法、等效非线性 系统法、随机平均法、矩法、泛级数法等。在处理多自由度非线性系统的随机响应和可靠性 问题时,等效线性化法仍是最为简单而可行的方法。这些近似方法的严格数学基础和适用范 围尚待研究。

非线性随机振动系统的分析方法大致可分为以下两类:

①由确定性非线性系统振动的分析方法推广到随机振动领域,如摄动法、统计非线性化法及随机平均法等;

②将概率论、随机过程及随机微分方程运用于非线性系统的振动分析中,如 FPK 法、矩闭 合法、函数级数法及随机数字模拟法等。

其中 FFK 法很早就用于研究物理学方面的问题,而用来研究随机振动问题大约有 30 年时间。它是根据随机做分方程理论以求解非线性系统的随机响应过程的概率密度函数为目标而建立起来的一种计算方法。如果当激励是一个白噪声时,响应则是一个 Markov 扩散过程,其

转移概率密度函數減足 PPK 方是 ... 一般由系统的运动方程转换或 PPK 方程有两条路径:... 是 该方程的演移及扩散系数通过对运动方程作摄限运算得到:... 是把运动方程按例之样换规则, 代之以一组等价的 Ito 万程,而调移与扩散系数通过与 Ito 方程的系数 作形式上的运算而得 到, 获得了 PPK 方程后,接下来的问题就是如何求解此方是,即找出响应过程的概率密度函 数,从而求出其他的概率特征。由于 PPK 方程的复杂性,到目的为止,求解随机振动问题尚矣 数,但不出其他的概率特征。由于 PPK 方程的复杂性,到目的为止,求解随机振动问题尚矣 的阻尼矩阵战正比。系统的恢复力是有势的零。这些条件限制了这个方法的实际应用,特别是 不能考虑很重要的非或性阻尼的情形。对非线性随机振动问题目前发展了许多以 PPK 方程 为基础的近似解法,如波代法、特征高数度开法、变分法等。

非线性隨机振动系统的另一个重要问顧是稳定性和分岔。目前有关關机稳定性的定义很 步中比较原用的有矩稳定性。平均稳定性,應因以puppore 稳定性和几乎必然稳定性等。但 是在实际应用中、不同的随机能定性有时会得到不同的结论。其合理性需要商寸。

随机分岔是指由参数的随机提纳引起系统的定性性质的变化。这是不同于确定性分岔和温常的提泡运动的一种复杂的非线性现象。目前随机分岔研究仍存在不同的思路,主要研究的是随机稳定性随线动强度所发生的变化。 Amedd. I. 在随机动力系统研究的基础上,认为非依性随机系统的稳定性可由最大 Lysqunov 指数决定,并将最大 Lysqunov 指数大定,并将最大 Lysqunov 指数大定,并将最大 Lysqunov 指数大定,并将最大 Lysqunov 指数大定,以为一个最主要内容,现有的计算方法较多地局限于 Khasmunaky 方法,它已经成功施应用于二维系统,但对于高维系统仍有很多困难。当优劲强度较小时,还可以用随机平均法和奇异振动法计算 Lysqunov 指数,至今随机分公额的计算仅局限于几个简单的分宏系统。

总之、非統性應机系統的动力学研究尚持際人开展。機構理论和工程应用发展的需要、应 当重点解决以下问题;非线性醣机振动响应的各种实用有效解法;醣机分泌研究类型和范围的 扩展。随机分泌的奇异性和危式理论;随机系统的高余维退化分估和色局分岔;随机分论一般 億吨与随机混构之间的区别与判据;随机参数系统的振动分析;若达解等。近20年来,非线性 随机振动已成为随机振动调心研究的重点之一。多数研究集中在非线性系统在随机分散下系 核的随机响应统计量的预测。而对非线性系统在随机外能下系统响应的定性方面问题的研究 较少。有学者用高新振断法研究了一类非线性系统的随机分位观象,用 Markov 近似理论研究 了一类二维非线性系统的随机 Hoyl 分岔问题。国内学者朱位积、黄志龙、刘先斌、汉海军、众 传客先后结合随机平均法、Markov 近似理论及 Irrepuor 特殊法研究了简机 Hogl 分合问题。

在确定性的非线性振动系统中会产生分岔及混沌运动,那么在非线性随机振动系统中是 否会产生分岔和摆拖运动呢,近几年来有一些学者就随机分岔与随机保地作了研究,并取得 了一些成果。但由于这类研究工作尚处于初始阶段以及问题本身的难度,使得无论在研究方 转上或在运动到根上那不是确定性问题那样较为成熟和统一。

由于随机分岔问题本身的难度及其研究方法的局限性。似乎可以认为这方面的工作还处于开始阶段。许多问题值得探讨。如随机分岔的含义是什么?用什么方法来判断它的出现。它 可确定性分岔现象有什么不同? 在非线性动力系统中,若受有确定性激励。在某些参数控制 下、将引起系统的瓣及其私补性质发生变化、即产生分岔现象。但在这样一个分岔系统中,再受到随机因素干扰时,将出现什么新的现象呢?能否像确定性问题那样明确分岔点的定义呢?

分岔系统若再次受到随机干扰(如噪声干扰,这是在实际问题中常遇到的现象),此时原来

的拓扑概念已失去了它的意义,而应用测度论、动力学量以及概率论来重新定义分岔的行为。 尽管端声动力系统不能用新扑性质的改变来定义分岔。但一般认为,响应过程的不变测度,不 变错密度,Lyapunov 指数以及有效势等,都将随着参数的变化而发生变化,这就为引进噪声系 统的分岔含义提供了可行的途径。下面将通过一些典型分岔的分析,试图对随机分岔的概念、 研究的方法加以说明。

考虑由如下常微分方程描述的确定性动力学系统

$$\begin{array}{c}
\dot{x} = f(x, \alpha) \\
x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^2
\end{array}$$
(2-64)

其中 α 为参数。 对给定的 α ,设 $x_*(s,a)$ 为系统(2-64) 的稳态解,如果当 α 在 α = a, 附近时 $x_*(t,a)$ 附定性性病发生变化,例如当 α < α , 时 $x_*(t,a)$ 総定・当 α > α , 时 $x_*(t,a)$ 不稳定,则 α < α > α >

由于实际系统中不可避免地受到随机因素 $\sigma_{k}(t)$ 的干扰,考虑受随机扰动后系统(2-64) 变为

$$\frac{\dot{x} = f(x, \alpha, \sigma_k^c(t))}{x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n}$$
(2-65)

式中。g(t)为 - 規則过程。σ 为基础度。或(2-65)中的平稳解 x(t)相当于或(2-64)中的稳态 解。那么如何确定随机系统(2-65)的分岔点? 同确定性系统(2-64)的分析类似,首先将系统 (2-65)在平稳解 x(t)处线性化,得线性化后的方程为

$$\begin{array}{l}
\dot{u} = A(x_s(t), \zeta(t)) u \\
u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^n
\end{array}$$
(2-66)

其中 A(x,, ζ) 是 n×n 阶雅可比矩阵。

方程(2-66)零解的稳定性可由其 Lympumov 指數 $\lambda = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \ln \| u(t, u_0) \| *$ 兼确定, 根据 Onelecke 乘法遍历性定理, 系统(2-66)的 Lympumov 指數 $\Lambda_m < 0$ 的, 系统(2-66)的零無是几乎必然稳定的。这样根据最大 Lympumov 指數 $\Lambda_m < 0$ 的 系统(2-66)的零無是几乎必然稳定的。这样根据最大 Lympumov 指數 $\Lambda_m = 0$ 新定出来的点 $\alpha = a$ 。称为系统(2-65)的随机分岔点。这种确定随机分岔点的难则与确定的规则与确定数。统中是一致的,并已应用于随机动力学系统的研究中,如 Amold 等。但也有许多研究者,例如 Horatherake 和 Lefever 等,是从系统响应的验金概率市底的角度来给出系统(2-65)随机分岔点的定义,即如果稳金概率密度的几何形状在 $\alpha = a$,所近发生本质的变化,例如当 $\alpha < a$ 。时为单纯函数,则 $\alpha < a$ 。时为单纯函数,则 $\alpha < a$ 。时为

由于动力系统中有髓机下弦、特别是噪声下弦的情形是比较普遍存在的现象。因此、研究 随机分岔问题是具有实际意义的。从上面简单的介绍可以看出,问题尚未完全解决,值得继续 研究。

2.3 混沌理论

从牛顿(Newton)力学创立时起,人们就坚信:对一个确定性动力系统施加确定性的输入,

则该系统的输出 · 定是确定的。这就是拉普拉斯(Laplace)的确定论思想。对于线性系统,这一结论是正确的,但对于非线性系统,则可能出现 · 种无法精确重复, 貌似随机的运动,人们称之为混沌(chaua)。混沌避论杂配了确定论和概率论两大理论体系之间的桥梁,与相对论和量子力学 · 是被称为 20 世纪物理学的三大基合。

2.3.1 混沌的定义及特征

1. 湿浊的定义

由于混沌系统的奇异性和复杂性至今尚未被人们彻底了解,不同领域的学者从不同角度给出了定义,因此混沌至今还没有一个统一的定义。以下给出的暴几种影响较广的定义。

- (1)Li-Yorke(李天岩-约克)的混沌定义
- Li-Yorke 定义是影响较广的混沌的数学定义之一, 它是从区间映射的角度出发进行定义的。以下首先叙述 Li-Yorke 定理。
- 定理 2.8 Li-Yorke 定理 设 f(x)是[a,b]上的连续自映射,若 f(x)有 3 周期点,则对任何正整数 n.f(x)有 n 周期点。
 - 下面介绍 Li-Yorke 的混沌定义。
 - 定义 2.15 当满足以下条件时, [a,b]上的连续自映射 f 称为是混沌的。
 - ①f 的周期点的周期无上界。
 - ②存在不可数子集 SC[a,b], S中无周期点,且满足:
 - a.对任意 $z, y \in S$,有 lim inf |f'(z) f'(y)| = 0;
 - b.对任意 $x, y \in S, x \neq y$,有 $\lim_{x \to y} \sup |f(x) f(y)| > 0$;
 - c.对任意 $x \in S$ 和 f 的任意周期点 y ,有 $\lim \sup |f'(x) f'(y)| > 0$ 。
- 在 Li-Yorke 的混沌定义中,前两个极限表明子集中的点 x 和 y 相当分散又相当集中,第三 个极限表明子集不会趋近于任意周期点。
- 根据 Li-Yorke 定理和 Li-Yorke 的混沌定义可知: 对[a, b]上的连续自映射 f,如果存在一个周期为3的周期点,就一定存在周期为任何正整数的周期点,则一定会出现探询理象。
 - Li-Yorke 的混沌定义刻画了混沌运动的以下 3 个重要特征:
 - ①存在可數的无穷多个稳定的簡期轨道:
 - ②存在不可数的无穷多个稳定的非周期轨道:
 - ③至少存在一个不稳定的非周期轨道。
 - **⑤至少仔在一个**个稳定的非周期机
 - (2)Devaney 的混沌定义

Devaney 的滟沌定义是另一种影响较广的混沌的數学定义,它是从拓扑的角度出发进行定义的。

- 定义 2.16 度量空间 V 上的映射 f: V→V 称为是混沌的,若其满足:
- ①对初值的敏感依赖性,存在 $\delta > 0$,对任意的 $\epsilon > 0$ 和任意的 $z \in V$,在 x 的 ϵ 邻域 I 内存在 y 和自然數 n.使得 $d(f'(x),f'(y)) > \delta$;
- ②新扑传递性,对 V 上的任意开集 X X , 存在 k > 0 , $f'(X) \cap Y \neq \emptyset$ (如一映射具有稠轨 道,则它显然是拓扑传递的);
 - ③f的周期点集在 V 中稠密。

Devaney 的提纯定义从另一个角度剩面了混沌运动的几个重要特征。对初值的敏感依赖 性意味着无论。和 p 距离有多近、在f 的多次作用下两着之间的距离 a 都会扩大到一定地步 (大于 8),而这样的 y 在x 任意 个小的邻域内潜在者。对这样的 f, 如果用计算机计算 t, 轨道, 则任意微小的初始误差就将导致多次迭代后的计算结果与实际结果产生足够大的差界。 从而导致计算失败。因此对初值的敏感依赖性也称为不可预测性。 拓扑传递性意味着任一点 的邻城在 f 的多次作用下将温度度量空间 V. 这说明 f 不可能分解为两个在 f 下 互不影响的 f 系统。周期点集在 V 中興奮意味着提纯系统存在着规律性的成分,决非混乱一片,形似混乱 而定则有作。

2. 湿冰运动的基本特征

混沌运动是确定性非线性动力系统所特有的复杂运动状态,出现在某些耗散系统,不可积 哈虧額系统和非线性胸散映射系统中。通常,确定性动力系统有3种定常状态,即平衡态。周 期运动和准周期运动。混沌运动不同于上述3种运动,它是一种不稳定的有限定常运动,局限 于有限区域但轨道水不重复,也被描述为具有无穷大周期的周期运动。混沌运动独有的特征 寿观为以下几个方面。

(1)有界性

混沌是有界的,它的軌线始終局限于一个軌定的区域,这个区域称为混沌吸引域。无论混 流流使为都如何不稳定,它的轨线都不会走出摆拖吸引域,因此从整体上说混沌系统是稳定 的。

(2) 適历件

混沌运动在其混沌吸引域内是各态历经的,即在有限时间内混沌轨道经过混沌区内每一个水东点。

(3)内随机性

确定性动力系统一般只有尴加随机性的输入才能产生随机性的输出。混沌系统也是确定 性动力系统,但它在施加确定性的输入后却产生类假膜机的运动状态。这显然是系统内部自 发产生的,故称为内随机性。这种内随机性与通常的随机性不同,它是由系统对初值的敏感性 (即不可预测性)造成的,体费了很纯系统的局部不稳定性 (。)

(4)分维件

播祂系統在相空间中的运动執线,在某个有限区域内经过无限次折叠,形成一种特殊曲线。这种曲线的维敷不是整敷,而是分數,故称为分维。分维性表明混沌运动具有无限层次的自相似结构,即继和运动参与一定规律的,这是提准运动与随机运动的重要区别之一。

(5)标度件

混沌运动是无序中的有序态。只要数值或实验设备精度足够高,总可以在小尺度的混沌 域内观察到有序的运动形式。

(6)普话性

不同系统在約丁規矩时会表現出某些共同特征、不依具体的系统方程或系统参数而改变、 这种性质称为普运性。普运性主要体现在微地的几个普适常数(如 Feigenhauan 常数)上,是混 纯的内在规律性的体观。

(7)统计特征

统计特征包括正的指数和连续功率谱等。

2.3.2 湿浊的研究方法

混沌的研究方法可分为定件方法和定量方法两大举。

- 1. 定性方法
- 它性方法包括以下 4 种。
- (1)直接观测法

这种方法是根据动力学系统的数值运算结果,画出相空间中相轨透馏时间的变化图以及 状态变量随时间的历程图。通过对比、分析和综合化确定解的分岔与混沌现象。在相空间中, 周期运动对应普封闭曲线,混沌运动对应普一定区域内随机分布的永不封闭的轨迹(奇怪吸引 子)。新田铁岭 k k f f f l in a c 分 c 和 m = 5

(2)分類妥样法

对周期外力作用下的非线性概予,研究其倍周期分估和稳纯现象,可采用分频采样法。该 方法是实验物理学中内标采样法的推广。为避免复杂运动在相空间中轨迹的混乱不清,可以 只限于观察隔一定时间间隔(称为采样周期)在相空间的代表点(称为采样点),这样,原来在相 空间的连续轨迹就被一系列离散点所代表。分频采样法是目前辨认长周期混沌带的最有效的 方柱。

对于受迫振动,采鲜周期常取为外控力周期,当采样的结果为一点时,系统作周期运动(特殊情况下是稳定态);当采样结果是,不离散点时,采统运动也是周期的,运动周期是外控力周期的,倍;;采样结果是无穷多个高散点时,运动是随机的;若采样点集中在一定区域内并且具有层次结构,则此伪随机运动就是混沌。不断增大分辨能力,可以得到不断重复原分布形态的细数。用。但结构,这种正容层水的自相似也或是长度不夸性。

分頻采掉法适用于一切由周期外力驱动的非线性系统,具有运离于其他方弦的分辨能力, 面具分辨能力构體计算机字长的扩大而进一步變高。但读方法也存在者一定的缺点,一是 個點不唯一,一是不能分辨比采掉粗率重急的概率。

(3)废加莱戴面法

对于含多个状态变量的白油微分方程系统,可采用能加莱魏面法进行分析。其基本思想 是:在多维相空间 $(x_1,dx_1/dt,x_2,dt_3,x_4/dt_4)$ 中适当选取一截固 在此截固上对某 一对共轭变量 $\mathbf{u}(x_1,dx_1/dt_4)$ 取固定值,称此截面为能加莱截面。观察运动轨迹与此截面的载 成(底加莱点),设它们依次为 $P_0,P_1,\cdots,P_1,\cdots$,则原来相空间的连续轨迹在能加莱截面上表 现为一些离散占之间的除料 P_{-1} = P_{-1} 。由此间得到系统运动特性的信息。

单变量的周期运动在相平面的轨迹是封闭曲线,二变量的周期运动在2×2维相空间的轨迹是二维环面……N 变量的周期运动在N×N 维相空间的轨迹是N 维环面。若不考虑系统 初始阶段的智态过程,只考虑选加莱藏面上的名用线,则当此加莱藏面上只有一个不动点或少数离散点时,运动是周期的;当庞加莱藏面上是一闭曲线时,运动是准周期的;当庞加莱戴面上是战片的密集点且有层处结构时,运动是混沌的。

(4) 重构相空间法(層相空间法)

当对數學模型未知的前力系统进行混沌行为分析时,上述的 3 种方法就不适用了,此时可 界面构相空间法。其做法如下:在实验过程中对某一个变量进行测量、得到时间序列 $\{x(k),k=1,2,...,N$ (用,再适单或中一间延迟量 $\tau_i\tau$ 为采样周期的整数倍、取 $\pi(k),x(k+1)$ r).x(k+2r),···,x(k+(m-1)r)为坐标输,重新构建 m 维相空间,并利用先前侧得的时间 序列画出系统在这一 m 维相空间里的轨迹。这个 m 维相空间被称为重构相空间或膜相空间。 同。

根据嵌入定理,只要重构相空间的维数(也称嵌入维数) m 与系统的真实相空间的维数 n 满足 m≥2n + 1. 就能够保证系统在篮梯相空间中的动力学行为与在真实相空间中的动力学行 为拓扑等价。因此, 重构相空间中的轨迹也可以反映系统运动状态的演化规律。对于定志, 重 构相空间中的轨迹是—个定点, 对于周别运动, 重构相空间中的轨迹是有限个点; 而对于混沌 运动, 重构相空间中的轨迹是—◆具有一字分布形式或绘构的离散点。

2. 定量分析方法

定量分析方法包括以下 2 种。

(1)Lyanunoy 指数分析法

写上述 4 种定性分析方法不同,Lympunov 指數分析法是一种定量分析的方法。Liouville 定 理指出、保守系统在相空间运动的这程中始终保持相棒积不变。但对于一个耗骸系统、其相体积、数妥逐渐收缩。即 n 维相空间的轨线都要收缩到& 维环面上 对于一个轮散系统、其相体或动,它存在着两个相反的过程。一方面耗散作用要使轨道收缩,另一方面轨道又要相互分离。收缩是由方程本身决定的(存在耗败项)、它是对相空间整体来说的,其作用是使远处的轨道的内收缩至有限的范围内(吸引子);发散是局部性质的,是对于相空间具体点附近的性质来说的,它使止靠近的轨道相互排斥。这样,所有的轨道最终集中在相空间的有限范围内,即相互都能以相互排斥。经过无数次的来间折叠,形成复杂的运动形态。即成为混沌态。为了定量地刻画混沌系统相邻的两点相至分离的快慢,人们引人 Lingunov 指数。

对 ·维映射 $z_{n+1}=f(z_n)$,假定初始点为 z_0 ,相邻点为 $z_0+\delta z_0$,经过 n 次迭代后,它们之间的距离

$$\delta x_n = i f^{(n)}(x_0 + \delta x_0) - f^{(n)}(x_0) i = \frac{df^{(n)}(x_0)}{dx} \delta x_0$$

 $|f^{(a)}(x_0 + \varepsilon) - f^{(a)}(x_0)| = \varepsilon e^{\alpha r(x_0)}$

当 $\left|\frac{df}{dz}\right| > 1$ 时,经过 n 次迭代后初始点 z_0 与相邻点 z_0 + z_0 。相互分离;当 $\left|\frac{df}{dz}\right| < 1$ 时,经 过 n 次迭代后初始点 z_0 + z_0 。相互常能。如約所述,在混沌运动中系统的轨道既相 互靠拢又相 互排斥,因此混沌运动中, z_0 的值在不断地变化。 为了从整体上观察相邻两轨, 遗分高或靠近的趋势,需要对迭代过程进行平均化。 为此,设平均体次进代所引起的指数分离中的指数为 z_0 则服先相能为 z_0 的两点经过 z_0 次进代后,两点间的距离为

$$\stackrel{\cong}{=} \epsilon \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \mathbb{R}^{\frac{1}{2}}$$

$$\sigma(x_0) = \lim \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^{(n)}(x_0 + \epsilon) - f^{(n)}(x_0)}{dx_0} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^{(n)}(x)}{dx_0} \right|$$

σ 称为 Lyapunov 指数, 它表示在多次迭代过程中平均每次迭代所引起的相邻离散点之间 以指数速度分离或靠近的趋势。

在 n 维相空间中, δx 是n 维的, 从而 δ 有 n 个值。在 $t=t_0$ 时, 以 x_0 为中心, δx (x_0,t_0) 为 半径作 n 维超球面, 由于各方向上的收缩或扩展的程度不同, 随着时间的演化, 在 t 时刻, 该 n 维超球面将变形为 n 维超椭球面。此 n 维超椭球面的第i 个坐标轴方向的半轴长在i 时刻为 $\partial x_i(x_0,t)$,则 L_y apamov 指数 σ 的第i 个分量 σ , 为

$$\sigma_i(x_0) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \left| \frac{\partial x_i(x_0, t)}{\partial x_i(x_0, t_0)} \right|$$

由此可见, σ 的n个不同分量的表示轨道沿不同的方向收缩或扩展。

对一维情况,吸引于只能是不动点,此时 $\sigma < 0$ 。

对二维情况,吸引子为不动点或极限环。

①若吸引子为不动点, 則任意方向的 δx_i 都要收缩, 则这两个 Lyapunov 指數都应当是负的, 因此不动点的 Lyapunov 指數 $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) = (-, -)$ 。

②若吸引子为极限环,如果 δx_i 垂直于环线方向,则 δx_i 一定收缩,此时 $\sigma < 0$;如果 δx_i 沿 环线的切线方向,则 δx_i 不变,此时 $\sigma = 0$ 。因此极限环的 Lyapunov 指數 $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) = (-1, 0)$ 。

对三维情况,经过与二维情况相仿的讨论可知:

- ①若吸引子为不动点,则其 Lyapunov 指數 σ = (σ, σ, σ, σ,) = (-.-.):
- ②若吸引于为稳定极限环,则其 Lyapunov 指數 $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (-, -, 0)$;
- ③若吸引子为稳定二维环面,则其 Lyapunov 指數 $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (-.0.0)$;
- ①若吸引子为不稳定极限环、则其 Lyapunov 指數 $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (+, +, 0)$;
- ⑤若吸引子为不稳定二维环面,则其 Lyapunov 指数 $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (+, 0, 0)$;
- ⑥若吸引子为奇经吸引子、剛茸 [vapamov 指数 σ = (σ, σ, σ, σ,) = (+, -, 0)。
- (2)自功率遵察度分析法

根据 Fourier 分析,任何周期为 T 的周期信号 x(z) 都可以展开为 Fourier 级數。其物理意义是任何周期运动可以看作是基頻 $\omega_0=2\pi/T$ 和一系列泛谐振 $n\omega_0$ 的叠加,故

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{im_0 t}$$

此中

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\pi/2}^{T/2} x(t) e^{-i\alpha n_0 t} dt$$

准周期运动也可以分解为一系列频率不可约的正弦振动的叠加,二者都具有离散谱。对于任意非周期运动的信号x(z),若满足绝对可积条件

$$\int_{-\pi}^{\pi} |x(t)| dt < \infty$$

则可展开为 Fourier 积分

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$
$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt$$

即非周期运动信号的频率谱是连续谱。

为了表示混沌信号的頻域特征,可求其自相关函數 $R_{m}(\tau)$ 的 Fourier 变换,根据所求得的自功率消密度函數 $S_{m}(f)$ 来分析混沌的頻域特征。

$$S_{xx}(f) = \int_{-1}^{x} R_{xx}(\tau) e^{-i2\pi jt} d\tau$$

$$R_{ss}(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} S_{ss}(f) e^{-ik\eta t} df$$

对周期运动,功率进入在基频及其倍额处出观文峰。在周期对应的功率潜在几个不可约的 基架以及它们叠加所在频率处出观文峰。不同带宽的噪声的自功率消的带宽可几度示噪声的 频率宽窄的特点。发生倍周期分定时,功率进中将出现分频及支倍频,在这些频率点上功率诺 图也都具有尖峰。 混构运动的特征在功率进中表现发力出现睡声背景宽峰的连续谐,其中含有 与周期运动对应的尖峰,这表示混沌运动轨道访问各个混沌带的平均周期。根据这些特点,可 以报答易绝识别运动的特征是阐期的压量准周期的,随机的或混沌的。

为了获得可靠的功率潜。需要对若干个相键的采样序列的诸作平均。另外,在开始采样前 必须等符过渡过程消失,如果原始数据来自包含大量噪声与外部干扰的测量,还应当考虑适当 的建筑或半量化。

除了上述6种基本方法以外,还有其他分析根地的方法,如分形律數分析法、測度輸法等。 在实际应用的时候,常常不是单纯地使用某一种方法,而是特定性的方法与定量的方法给合起 来,以森特摩加爾森的结果。

2.3.3 随机混沌

近年来,非线性系统的随机混构是许多学者感兴趣的问题之一,整于许多问题尚未得到解决,如随机混构运动的定义及识别办法等,故此类研究商处于开始阶段。因为一个非线性系统 在确定性激励下,只需系统具有适宜的参数则会产生混沌,如再加上随机激励,系统响应将是 什么?是否仍称之为随机混沌。 众所周知,在确定性问题中, Lyapunov 指数 礼,是可以用来判 别运动形态的。随后有,儿还系统的指数是和称之为 Kolnoggeov 熵,并以此判别运动的形态。即

$$H = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tag{2-67}$$

在式(2-67)中、人是 n 维系统中第: 地 L_{FRJBMOV} 指数、如果对所有的 i、人<0,则认为 H=0,此时系统的运动为规则振动;如周期应报。周两运动,其中 $\lambda=0$ 是对保守系统。而 $\lambda<0$ 是对帐的运动为规则振动;如周期应报。周两运动,其中 $\lambda=0$ 是对保守系统。而 $\lambda<0$ 是对帐资统。如果只要有一个 $\lambda>0$,则 H>0。此时系统的运动为福池过程。如果 $H=\omega$,则运动为随机过程。这样显然非常明确地区分 f一种运动的形态。但平衡地活在实际中这种单纯运动形态。但平衡地运动都存在,那么 H 等于多少?因此仅用一个指标来判断随机报池运动是不够的,于是有人提出用随机敏感函数、来判断一个非线性随机系统是正规的随机振动,还是能池运动。通过计算 L_{Duffing} 非被性系统 在随机激励下的响应发现,如果该系统存在被限水,则超机敏感函数的均值及方差均随时间变化而收敛于零,对其低规则吸引于则为有限值。而对具有混构运动动的非线性随机系统,则此函数的均值及方差均随时间增加而指数增加,也就是不收敛的。因此他们认为用这样一个指标来则明北线性随机系统处于强化运动或方规则运动是可行的。

有学者提出了多峰值的概率密度函数的概念,来判别运动是否为随机混沌过程。因为一 般的随机过程的概率密度函数是一个比较光滑的曲线,而当系统出现随机混沌运动时,在概率 廖康高教的图形中全出现许多聚集的峰值。但反之类出现多峰值的图形并不音味着系统将出 现储机混沌运动,因为此时有可能在 Poincare 图中出现孤立的点,这是拟周期运动。因此多峰 值图形并不是充分条件,而需要找另一种判据。

又有学老认为 Melnikov 函数注 分维数以及容量维数等方法也可以作为判别据冲出现的 准则,有时可用来鉴别随机源海。但是所提出的方法,都是通过具体数值计算而得到的,是否 具有普遍意义, 值得进一步探讨。由于混沌运动本身的复杂性, 再加上随机干扰, 使解决问题 的难度更大。

2.4 非线性随机动力学理论

非线性系统在 Gauss 白鳗声激励下的响应是扩散的 Markov 过程,可简称为扩散过程;系统 的运动微分方程可以模型化为 Ito 或 Stratonovich 随机微分方程: 系统响应 - 扩散过程的转移概 塞察度函数应端足相应的 FPK (Fokker-Planck-Kolmogolov) 方程。由随机动力系统导出 FPK 方 程的漂移和扩散系数进而求解 FPK 方程、常称为 FPK 方法。而 FPK 方程漂移和扩散系数可以 通过随机平均法得到,随机平均法是应用平均法构造 · 个与原系统近似等效的受白噪声激励 的系统,然后求解该等效系统的 FPK 方程。由于该方法的实用性较强,它已成为在随机振动 与随机分岔研究中广为应用的方法之一。随机平均原理是随机平均法的严格数学基础。该原 理的主要依据为 Stratonovich 和 Khasminisky 的极限定理。随机平均法中常见的有标准平均法、 FPK 系数平均法及能量包线平均法等。

在研究受到噪声激励的动力系统响应的问题时、Statonovich提出了随机平均法的思想、解 决确定系统的非线性振动问题的平均法的思想已被推广到了研究非线性随机动力系统的研究

当随机动力系统受到白噪声激励(参数激励或外部激励)时。则可利用随机平均法推导出 相应的 Ito 型或 Statonovich 型随机微分方程。随机平均法不仅适用于单自由度的随机提动问 额的研究,也活用于多自由度问题的研究。其关键是要求随机激励为宽带白噪声的弱非线性的 随机探动系统。

在随机微分方程的理论及应用中、有两类随机微分方程、即 Statonovich 随机微分方程与 Ito 随机微分方程,在二者之间常常需要相互转化。而对于扩散过程, 满足 Ito 随机微分方程, 又常 常需要建立过程的转移概率密度函数所满足的 FPK 方程。这些工作的进行需要大量的推导 与计算,在此振要介绍以上理论。

随机平均法与随机微分方程 2.4.1

1 建机平均原理

随机平均原理是随机平均法的严格数学基础。该原理的主要依据为 Stratonovich 和 Khasminisky 的极限定理。考虑如下非线性振动系统

$$d\mathbf{Z}(t) = g(T, t) dt + e^{\frac{1}{2}} g(X, t) dt + \Psi(t)$$
 (2-68)
其中: $X(t)$ 为。 #雜納免費: $Y(t)$ 或者是一个 m 维具有零均值的平稳随机过程: 且为宽带过
程: 或址相关高数 R_t (r) 随: 突破足够快。 或横足强混合条件。 当 e^{-4} 时, 在 $e^{-\frac{1}{2}}$ 握你时间

程,或其相关函数 $R_{\nu}(\tau)$ 随 τ 衰减足够快,或满足强混合条件。当 ε→0 时,在 ε⁻¹量级的时间 区间上、X(1)弱收敛于一个 n 维扩散 Markov 过程、并满足下列标准的 lto 随机微分方程(其极 限扩散过程满足的方程)

 $dX = sm(X)dt + s^{\frac{1}{2}}\sigma(X)dW(t) \qquad (2-69)$

其中 W(z)是一个 n 维独立的标准 Wiener 向量随机过程, m(X)和 $\sigma(X)$ 分别由下式确定:

$$\begin{split} m_{r}(\boldsymbol{X}) &= \left\langle f_{r}(\boldsymbol{X},t) + \int_{-\pi}^{0} \frac{\partial g_{d}(\boldsymbol{X},t)}{\partial x_{r}} g_{f}(\boldsymbol{X},t+\tau) R_{H}(\tau) d\tau \right\rangle_{t} \\ \sigma_{d}(\boldsymbol{X}) \sigma_{f}(\boldsymbol{X}) &= b_{g}(\boldsymbol{X}) = \left\langle \int_{-\pi}^{+\pi} g_{d}(\boldsymbol{X},t) g_{f}(\boldsymbol{X},t+\tau) R_{H}(\tau) d\tau \right\rangle_{t} \end{split}$$

其中 $\langle \cdot \rangle_i \simeq \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T_i} \int_{t_0}^{t_0 - T} \langle \cdot \rangle dt$ 为时间罕均算子,若 $f(X, t) \setminus g(X, t)$ 是以 T_0 为周期的周期函数时,上式中 $\langle \cdot \rangle_i = \frac{1}{T_i} \int_{t_0}^{t_0 - T_0} \langle \cdot \rangle dt$, t_0 是任意的。

2. 随机微分方程与 FPK 方程

FPK 方程方法主要是把系统的位移响应着成是状态空间中的一个多维雕机过程向量。当 系统的激励是白睐声时。该雕机过程向量在任意时刻的增量是模立的,即过程具有 Markov 性 且为扩散的,其概率结构完全可由如始条件和转移模率增度消费决定。而扩散过程的新概率密 度函数服从 FPK 方程,所以若能够求解其 FPK 方程,则可能得到系统的转移概率密度函数,从 而得到系统的统计规律。签于 FPK 方程的复杂性、迄今为止只有少数情况下的方程可以计算 其精确解(如当系统是现线性阻尼、激励的相关函数矩阵与系统的阻矩阵或比例以及系统的 恢复力为有势的时候)。这就极大地限别了该方法的使用,尤其是对于非用的非线性阻尼的 况,无法得到精确解。在一维非线性情况下,在稳态情况下可以找到精确解。而对于非稳态状态只有少数情况可以找到精确解。

在随机微分方程的理论及应用中,有两类随机微分方程,即 Stationovich 隨机微分方程与 Lo 随机微分方程,在二者之间常常需要相互转化。而对于调定 ho 随机碳分方程的随机响应,可 以建立过程的转移概率需度函数的 FPR 方程。这些工作的进行需要大量的推导与计算,在此 株以上工作的主要内容介绍如下。

3. Ito 随机微分方程与 FPK 方程

设 W(t)为 n 维矢量 Wiener 过程,各分量相互独立并具有单位强度,其增量过程具有性 质: E[dW(t)]=0, $E[dW(t)dW^T(t)]=Idt$, 其中 I 为 m 维单位矩阵。n 维随机微分方程 (llo)的形式为

$$d\mathbf{Y}(t) = m(\mathbf{Y}, t)dt + \sigma(\mathbf{Y}, t)d\mathbf{W}(t)$$

$$\mathbf{Y}(t_0) = Y_0$$
(2-70)

其中 $Y=[Y_1 \quad Y_2 \quad \cdots \quad Y_n]^T, m=[m_1 \quad m_2 \quad \cdots \quad m_n]^T, \sigma=[\sigma_\beta]_{n,n}, m, \sigma$ 分别称为该方程的擦移矢量和扩散矩阵,其元素皆为 Y 与 t 的连续函数。式(2-70)对应的分量形式为

$$\frac{dY_{j}(t) = m_{j}(Y, t)dt + \sigma_{g}(Y, t)dW_{i}(t)}{Y_{j}(t_{0}) = Y_{D}}$$

$$(2-71)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n; l = 1, 2, \dots, m)$$

式(2-71)中重复的下标表示求和、在满足解的存在唯一性条件后、方程的唯一解 Y(t)为 n 维扩散过程。其转移概率密度 $P(Y,t|Y_0,t_0)$ 满足 FPK 方程

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial \left[a_{j}(Y, t)p\right]}{\partial Y_{j}} + \frac{1}{2} \frac{\partial^{2} \left[b_{k}(Y, t)p\right]}{\partial Y_{j}\partial Y_{k}} \quad (j, k = 1, 2, \dots, n)$$
(2-72)

其中

$$q_i(Y, t) = m_i(Y, t)|_{Y=x}$$
 (2-73)

$$b_{j_k}(Y, t) = [\sigma(Y, t)\sigma^T(Y, t)]_{j_k}|_{Y_*, y} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{j_k}(Y, t)\sigma_{j_k}(Y, t)|_{Y_{n-y}}$$
 (2-74)

式(2-72)、式(2-73)、式(2-74)表达了 FPK 方程源移与扩散系数同 lo 隨机機分方程的源 移与扩散系数之间的关系。这说明:在得到了 lo 随机微分方程后,通过上式可以求得其转移 概率密度所摘足的 FPK 方程,即由 lo 方程到 FPK 方程是唯一的: 反之,已知 FPK 方程却无法 唯一确定 lo 随机微分方程。这是由于若对式(2-72)、式(2-73)、式(2-74)中的 σ 换为 σ T, T 为 正交矩阵,则 FPK 方程不变,而 lo 方程的扩散矩阵为 σ T, 即同一个 FPK 方程可以对应无穷多个 lo 方程。

A Ito 触机器分法则

世 $\varphi(Y(t), t)$ 为 Y(t)与 t 的标量函数,且存在对 t 的偏导数及 Y(t)各分量的连续二阶 偏导数, Y(t)满足 tn 随机振分方程(2-70),则得到如下 tn 随机兼分公式,即 $\varphi(Y(t), t)$ 所满 足的 tn 随机散分方程

$$d\varphi(Y, t) = \left[\varphi_t + \varphi_T^T n t + \frac{1}{2} tr(\varphi_{TT} \sigma \sigma^T)\right] dt + \varphi_T^T \sigma dW(t)$$
 (2-75)

其中 $\phi_T = [\varphi_{T_1} \quad \varphi_{T_2} \quad \cdots \quad \varphi_{T_n}]^T, \varphi_{T_n} = \frac{\partial \varphi}{\partial Y_j} \varphi_{T^n} = [\varphi_{T_n}]_{*,***}, \varphi_{T_n} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y_j \partial Y_n}, \text{tr}(A)$ 表示矩阵 A 的遊、公式(2-75)也称为 Ito 機分达到或g Ito 引烈。

5. 两类随机微分方程之间的关系

在研究随机过程 Y(t)时,若可得到其概率转移密度函数 $p(Y,t|Y_0,t_0)$ 的表达式或是 $p(Y,t|Y_0,t_0)$ 所满足的 FPK 方程,则对于研究工作而言是解决了一大关键问题。 总之,要得 到 $p(Y,t|Y_0,t_0)$ 所满足的 FPK 方程。这就需要先建立 Y(t)所满足的 Ib 横分方程;而通常情况下,所讨论的随机动力系统遭受的随机激励皆为物理意义下的白噪声,所建立的方程为 Stratonovich 随机微分方程。所以在解决问题时,需先将 Stratonovich 随机微分方程转化为 Ito 随机微分方程。 对于 Stratonovich 随机像分方

转化为相应的 Ito 随机微分方程

$$dY_{j}(t) = \left[f_{j}(Y, t) + \frac{1}{2} g_{q}(Y, t) \frac{\partial g_{j}(Y, t)}{\partial Y_{r}} \right] dt + g_{j}(Y, t) dW_{i}(t), Y_{j}(t_{0}) = Y_{j0}$$

$$(j = 1, 2, \dots, n; l = 1, 2, \dots, m) \qquad (2.77)$$

同样, Ito 随机微分方程(2-71)可转化为相应的 Stratonovich 随机微分方程

$$d\mathbf{Y}_{j}(t) = \left[\mathbf{m}_{j}(\mathbf{Y}, t) - \frac{1}{2}\sigma_{n}(\mathbf{Y}, t) \frac{\partial \sigma_{j}(\mathbf{Y}, t)}{\partial \mathbf{Y}_{i}}\right]dt + \sigma_{j}(\mathbf{Y}, t)d^{*}\mathbf{W}_{i}(t), \mathbf{Y}_{j}(t_{0}) = \mathbf{Y}_{j_{0}}$$
(5.2)

修正項。式(2-71)~式(2-78)的表达式中, 重复下标表示求和。 在应用 PPK 方法求解非线性随机动力系统的随机响应时, 首先是将 Stratonovich 随机被分

在应用 FPK 方法求解非线性随机动力系统的随机响应时,首先是将 Stratonovich 随机微分 方程转化为 lo 随机微分方程,其代是计算精确解,两方面尚存在较大的困难。近年来,Lin Y. K, Cai G.Q 等人在寻求稳态精确解方面做了大量工作,朱位秋对 FPK 方程的求解方法的进展 作了全面而剩实的总结。

2.4.2 一维扩散过程的边界分析

一个扩散过程的性质很大程度上取决于扩散过程在边界的性态。尤其对于一维扩散过程,其概率新远程定性与其平稳概率密度的存在性可以完全由该过程在边界上的性态确定。 先后有多位学者对此问题进行过系统的阐述。若有一维时齐的扩散过程 X(t),满足如下 Io附机搬分方程:

$$dX(t) \ge m(X)dt + a(X)dW(t)$$
(2-79)

则 X(1)的边界可以由如下 4 个函数来分类:

①尺度函数,
$$l(z) = \int_{-\infty}^{z} \phi^{-1}(u) du$$
;

②速度函数,
$$v(s) = \int_{0}^{s} \frac{\phi(u)}{h(u)} du;$$

③从
$$z_0$$
 到达 x 的时间, $\Sigma(x) = \int_{-x}^{x} v(u) dl(u)$;

④从
$$x$$
 到达 x_0 的时间, $N(x) = \int_0^x l(u) dv(u)$,

其中 z₀∈(z₁,z₁)为内点,z₁、z₁分为左右边界,

$$a(x) = m(X)|_{X = x}, b(x) = \sigma^2(X)|_{X = x}, \psi(x) = \exp\left[\left[\frac{2a(x)}{b(x)}\mathrm{d}x\right]\right],$$

上述四个函数的关系如下:

②Σ(z)<∞意味者 l(z)<∞;

③ $v(x) = \infty$ 意味着 $N(x) = \infty$;

④N(x) < ∞意味着 v(x) < ∞;

 $\label{eq:sigma} \text{\Large$\left(\Sigma(x)+N(x)=l(x)v(x)\right)$.}$

边界的分类

- 扩散过程的边界可以分为加下4举。
- ①规则边界,过程既可以从内部到达边界,也可以从边界进入内部;
- ②越出边界, 过程可以从内部到达边界, 但不能从边界进入内部:
- ③进入边界,过程可以从边界进入内部,但不能从内部到达边界;
- ①自然边界,过程既不能从内部到达边界,也不能从边界进入内部。
- 自然边界又可以分为吸引自然边界、排斥自然边界及严格自然边界。

对于边界 x_s 可用上述函数在该处的函数值根据表 2-1 进行分类, 表中的 * 表示各类边界最少的充分条件。

		40			
判断准则				分 类	
l(π _b)	$v(x_b)$	$\Sigma(x_b)$	$N(x_b)$	π ×	
< = 1	< = "	< 100	< 00	死 则(regular)	可达到
< 01	= = "	< ≈ "		繼 出(ext)	-1 10 Md
< **	= **	m en *	z 00	吸引自然(stanctively natural)	
= w *	< 00 '	w 00	= 40 "	排斥自然(repulsively natural)	不可达到
2 00 °	= co *	= 00	s 00	严格自然(strictly natural)	达
= = "	< 10		< = *	遊 人(entrance)	

表 2-1 边界分类表

2. 奇异边界(singular boundary)

对于一维扩散过程 X(z), 若其样本轨道上存在某些奇点, 制这些奇点会对样本的性态产生需要的影响。若奇点又为边界, 则称之为奇异边界。(z)=0 的点 z, 为第一类奇异边界。 使源移系数 m(z,) 无界的点 z, 为第二类奇,人类,又是边界,则为第二类奇异边界。 使源移系数 m(z,) 无界的点 z, 为第二类奇,人类是边界,则为第二类奇异边界。

一般情况下计算奇异边界的 $I(x), v(x), N(x), \Sigma(x)$ 等函數是很困难的, 鉴于在边界分类时只需要这些积分的可积性,即源移系数与扩散系数在边界邻域的极限性态,以下给出奇异力原的分类解则。

3. 第一举奇异边界

- 设 $\sigma(z_*)=0$,
- ①若 m(z,)≠0,则称 z, 为流动点(shunt, m(z,)>0(<0),为右(左)流动点);
- ②若 m(x_e) = 0,则称 x_e 为套点(trap);
- ③若 $x = x_{-1}, \sigma^{2}(x) = O(|x x_{-1}|^{2}), \alpha_{-1} \ge 0$, 興称 α_{-1} 为 α_{-1} 的扩散指数(diffusion exponent);
- ④若 $x \rightarrow x_*, m(x) = O(|x x_*|^{\beta_*}), \beta_* \ge 0$, 则称 β_* 为 x_* 的漂移指数(drift exponent);
- ⑤若 x→x; 或 x→x,,

$$c_{1} = \lim_{x \to x_{1}^{+}} \frac{2m(x)(x - x_{1})^{x_{1} - \beta_{1}}}{\sigma^{2}(x)}$$
 (2-80)

$$c_{t} = -\lim_{x \to \epsilon_{t}^{+}} \frac{2m(x)(x_{t} - x)^{s_{t} - \beta_{t}}}{\sigma^{2}(x)}$$
 (2-81)

则称 c1、c. 为特征标值(character value)。

第一类奇异边界 z_a 的分类可由 α_a 、 β_a 以及 c_1 、 c_r 来确定,具体分类如表 2-2 所示。

表 2-2 第一类青异边界的分类表

系 敷		条 书			边界类别	
	a, < 1				规则	
$\sigma(z_n) = 0$		$m(x_1) < 0$ $\vec{a}_i m(x_1) > 0$		越出		
$(\alpha_s > 0)$ $m(z_s) \neq 0$	a, = 1	m(x ₁)>0	0<4	·, <1	规则	
(β _s = 0) 推动点		$m(x_r) < 0$	c,	≥l	进入	
(shant)	1	m(s	x_1) < 0 iff, $m(x_1) > 0$		離出	
	$a_0 > 1$	m(ı	r ₁) > 0 成 m(x _c) > ()	进人	
			$a_n < 1$		規則	
	a, < 1		1 ≪ a, < 2		越出	
	a, < 1		ε,⇒2		" 吸引负担	
	0	β _a < 1	m(x1°)<01	能 m(x,)>0	總出	
		ρ,<1	m(x ₁ *)>01	民 m(s,) < 0	进人	
$\sigma(x_0)$				m(n _l ⁺)<01	民 m(x _t -)>0	吸引自然
$(\alpha_x > 0)$ $m(s_x) = 0$ $(\beta_x > 0)$		β,≥1	m(s ₁ *)>01	成 m(z,) < 0	排斥自然	
(賽点,				e, ≥ 1	进人	
trap)		$\beta_1 < 1$	$c_s > \beta_s$	c _a < 1	规则	
	$a_n = 1$	$c_a \leqslant \beta_a$		越出		
			C ₀	> \(\beta_a \)	排斥自然	
		β,≥1		ε,≥1	产格自然	
			$c_{\epsilon} \leqslant \beta_{\epsilon}$	c, < 1	吸引自然	

4. 第二类奇异边界

设 m(x,) 无界而 | x, | < 00。

- ①若 x-+x,,σ²(x) = O(|x-x,|-*,),a,≥0,则称 a, 为 z, 的扩散指数;
- ②若 x→z, 时,

$$m(x) = O(|x - x_s|^{-\beta_s}), \beta_s \ge 0$$
, 興称 β_s 为 x_s 的漂移指數;
③者 $x + x_1^*$ 或 $x \rightarrow x_1^*$ 时,
 $c_1 = \lim_{x \rightarrow x_1^*} \frac{2m(x)(x - x_1)^{\beta_s - x_1}}{\sigma^2(x)}$
 $c_r = -\lim_{x \rightarrow x_1^*} \frac{2m(x)(x_r - x)^{\beta_s - x_s}}{\sigma^2(r)}$

则称 c1、c, 为特征标值。

第二类奇异边界 $z_*(|z_*|<\infty)$ 的分类可由 a_*,β_* 以及 c_1,c_* 来确定,具体见表 2-3 所示。

妻 2-3 |≈, | < ∞的青异边界分类表

系 数		类别		
	β, < 1			规则
m(x,) = m		4,6	施出	
(β _s > 0)	β, = I	~1 < c, <1		规则
$\sigma(x_s) < \infty$		e,;	c, ≥1	
(a, =0)	β, > 1	$m(x_1^*) < 0$ of $m(x_1^*) > 0$		越出
ļ		$m(x_i^*) > 0$ K	$\xi m(x_i^-) < 0$	进人
	$\beta_n < 1$			规则
m(x,)i==	β,>1	$m(x_i^+) < 0$ iff, $m(x_i^-) > 0$		態出
(β ₆ > 0)	ρ,>1	$m(x_i^*) > 0.1$	$R_{m(x_{i}^{-})<0}$	进入
$\sigma(s_z) = \infty$ $(\sigma_z > 0)$	1 0 0 0		e,≥l	进人
		$\varepsilon_{i} \equiv -\beta_{i}$	ε, < 1	規則
		c, < - β,		建出

5. 无穷远处第二类奇异边界

设 m(z,)无界而 |z,| = ∞。

①若
$$|x| \rightarrow \infty$$
, $\sigma^2(x) = O(|x|^{\epsilon_k})$, $a_k \ge 0$, 則称 a_k 为 x_k 的扩散指数;

②若
$$|z| \rightarrow \infty$$
, $m(z) = O(|z|^{\beta_z})$, $\beta_z \ge 0$, 则称 β_z 为 z_z 的源移指数;

③若
$$x \rightarrow -\infty$$
 或 $x \rightarrow +\infty$,
$$c_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2m(x) |x|^{s_1 - \beta_1}}{\sigma^2(x)}$$

$$c_2 = -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2m(x) |x|^{s_1 - \beta_1}}{\sigma^2(x)}$$

则称 $c_1 \setminus c$, 为 $|z_s| = 88$ 特征标值。

第二类奇异边界 $x_*(\mid x_*\mid =\infty)$ 的分类可由 α_* 、 β_* 以及 c_1 、 c_r 来确定,具体见表 2-4 所示。

系 败		条	件		类 别
$m(x_i) = \infty$	m(- m)<0	β _s >1			規則
$(\beta_s > 0)$	或 m(+ m)>0	$m(+\infty) > 0$ $\beta_0 \leqslant 1$			
$\sigma(\pi_{\mathfrak{b}})<\infty$	m(- m)>0	β,>1			规则
$(\alpha_s = 0)$	政 m(+ m) < 0		$\beta_* \ll 1$		进人
		m(-m)<0		$\beta_a > 1$	總出
	$\beta_a > \alpha_a - 1$	現 和(+=)>0		$\beta_i \le 1$	
		m(- m)>0		β ₆ > 1	进人
$m(\pi_e) = \infty$		$\mathfrak{M}_{m}(+\infty)<0$		$\beta_{\epsilon} \ll 1$	排斥自然
(B ₀ > 0)	$\beta_0 < \alpha_0 - 1$				规则
			$c_i > -\beta_i$		排斥自然
$\sigma(\pi_e)=\infty$	ω β,		c ₄ ≥ -1 ·	严格自然	
(a, > 0)		1	$c_a \leqslant -\beta_a$	c _e < -1	吸引自然
	$\beta_0 = \alpha_0 - 1$			c _e ≥ - 1	进人
		ρ,	$c_a > -\beta_b$	c ₆ < - 1	規則
			$c_b \le -\beta_b$		施出

養 2-4 当 | x | = ∞ 的奇异功界分类务

2.4.3 二維 Markov 随机过程的概率密度函数计算

对于具有周期激励的非线性随机动力系统,可以运用随机平均法将系统化为标准的 to 方 郊于具有周期激励的非线性随机动力系统,可以运用随机平均法将表现,所以必须借助于其 低重注计量系统操定 某业条件时的稳定概率密度高数。

在此介绍待定系数法,且仅以二维系统为例进行阐述。

设有二维随机过程 $(a(t), \varphi(t))$,満足随机微分方程

$$\frac{d\underline{a}(t)}{dt} = f_1(t, a, \varphi) + g_1(t, a, \varphi, \zeta_1(t), \zeta_2(t))$$

$$\frac{d\underline{\varphi}(t)}{dt} = f_2(t, a, \varphi) + g_2(t, a, \varphi, \zeta_1(t), \zeta_2(t))$$
(2-82)

并且设

$$\left[\frac{\partial(g_1,g_2)}{\partial(\alpha,\varphi)}\right\}_{\iota} \left[g_1,g_2\right]_{\iota,\iota}^{\intercal} = \left[g_{1u}(t)g_1(t+\tau) + g_{1\varphi}(t)g_2(t+\tau)\right] \overset{}{\triangleq} \left[h_1(t,\alpha,\varphi,\tau)\right] \\ h_2(t,\alpha,\varphi,\tau)$$

对系统(2-82)应用随机平均法可以得到如下标准的 lto 方程

$$da(t) = F_1(\alpha, \varphi) + \sigma_{11}dW_1 + \sigma_{12}dW_2$$

$$d\varphi(t) = F_2(\alpha, \varphi) + \sigma_{21}dW_1 + \sigma_{22}dW_2$$
(2-83)

其中 $\mathbf{W}_{i}(z)$ 、 $\mathbf{w}_{i}(z)$ 为独立的标准 Wiener 随机过程,而 $F_{i}(\alpha, \varphi) \setminus F_{i}(\alpha, \varphi) \setminus \sigma_{q} = \sigma_{i}(\alpha, \varphi)(z, y)$ = 1,2)的表达式如下:

$$F_1(\alpha,\varphi) = \left\langle f_1(\varepsilon,\alpha,\varphi) \right\rangle_{,} + \left\langle \int_{-\infty}^0 E[h_1(\varepsilon,\alpha,\varphi,\tau)] d\tau \right\rangle_{,}$$

$$F_2(\alpha, \varphi) = \langle f_2(\iota, \alpha, \varphi) \rangle_{\iota} + \langle \int_{-\pi}^{0} E[h_2(\iota, \alpha, \varphi, \tau)] d\tau \rangle_{\iota}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12}^2 \\ \sigma_{21}^2 & \sigma_{22}^2 \end{bmatrix} = \langle \int_{-\pi}^{+\pi} E\left(\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} [g_1 & g_2]_{1+\tau}\right) d\tau \rangle_{\tau}$$

显然 $\sigma_{12}^1 = \sigma_{21}^2$,这样所得到的 $[a(t) \quad \varphi(t)]$ 为二维的 Markov 过程,其转移概率密度函数 记为 $P(a,\varphi,t)$ 1(a_0,φ_0,t_0),它满足下列的 FPK 方程:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial (F_1 P)}{\partial x} + \frac{\partial (F_2 P)}{\partial x} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 (\sigma_{11}^2 P)}{\partial x^2} + \frac{2\partial^2 (\sigma_{12}^2 P)}{\partial x \partial x} + \frac{\partial^2 (\sigma_{22}^2 P)}{\partial x^2} \right]$$
(2-84)

在大量的研究工作中,人们所关注的是稳态响应的概率密度。

设 $\lim P(a,\varphi,t|a_0,\varphi_0,t_0) = Q(a,\varphi)$,則有稳态概率密度函数 $Q(a,\varphi)$ 満足如下方程:

$$\frac{\partial (F_1Q)}{\partial a} + \frac{\partial (F_2Q)}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 (\sigma_{11}^2Q)}{\partial a^2} + \frac{2\partial^2 (\sigma_{12}^2Q)}{\partial a\partial \varphi} + \frac{\partial^2 (\sigma_{22}^2Q)}{\partial \varphi^2} \right]$$
(2-85)

在此引入待定参数 4. 使得下式成立

$$\frac{\partial}{\partial a} \left[F_1 Q - \frac{1}{2} \frac{\partial (\sigma_{11}^2 Q)}{\partial a} - \mu \frac{\partial (\sigma_{12}^2 Q)}{\partial \phi} \right] = -\frac{\partial}{\partial \phi} \left[F_2 Q - \frac{1}{2} \frac{\partial (\sigma_{21}^2 Q)}{\partial \phi} + (\mu - 1) \frac{\partial (\sigma_{11}^2 Q)}{\partial a} \right]$$
(2-86)

作进一步假设,有下列条件成立:

$$F_1 Q - \frac{1}{2} \frac{\partial (\sigma_{11}^2 Q)}{\partial a} - \mu \frac{\partial (\sigma_{12}^2 Q)}{\partial \phi} = 0, \quad F_2 Q - \frac{1}{2} \frac{\partial (\sigma_{22}^2 Q)}{\partial \phi} + (\mu - 1) \frac{\partial (\sigma_{12}^2 Q)}{\partial a} = 0$$

由微分方程的理论,可设 $Q(a,\varphi) = \exp(u(a,\varphi))$,代人上面二式可得

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \varphi} = \frac{1}{\Delta} \left[a_{2}^{2} \left(2F_{1} - \frac{\partial (\sigma_{1}^{2})}{\partial a} - 2\mu \frac{\partial (\sigma_{1}^{2})}{\partial \varphi} \right) - 2\mu \sigma_{1}^{2} \left(2F_{2} - \frac{\partial (\sigma_{2}^{2})}{\partial \varphi} + 2(\mu - 1) \frac{\partial (\sigma_{1}^{2})}{\partial u} \right) \right]$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \varphi} = \frac{1}{\Delta} \left[\sigma_{1}^{2} \left(2F_{1} + 2(\mu - 1) \frac{\partial (\sigma_{2}^{2})}{\partial u} - \frac{\partial (\sigma_{2}^{2})}{\partial \varphi} - \frac{\partial (\sigma_{2}^{2})}{\partial \varphi} \right) + (\mu - 1) \sigma_{1}^{2} \left(4F_{1} - 2 \frac{\partial (\sigma_{1}^{2})}{\partial u} - 4\mu \frac{\partial (\sigma_{1}^{2})}{\partial \varphi} \right) \right]$$

$$(2.87)$$

其中 $\Delta = 4\mu(\mu - 1)\sigma_{12}^4 + \sigma_{11}^2\sigma_{22}^2 \neq 0$, 即 $\mu \neq \frac{1}{2\sigma_{12}^2}(\sigma_{12}^2 \pm \sqrt{\sigma_{12}^4 - \sigma_{12}^2\sigma_{22}^2})$

所以若能找到恰当數值 μ ,使得函數 $u(a,\varphi)$ 満足二阶編导连续条件,即 $\frac{\partial^2 u}{\partial a\partial \varphi}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial a}$ 连续,

則有 $\frac{\partial^2 u}{\partial c \partial \rho} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho a}$, 也称为可积性条件。进面有 $u(a, \varphi) = \int \frac{\partial u}{\partial a} d\alpha + \frac{\partial u}{\partial \rho} d\varphi$, 即得到响应过程 $(a(t), \varphi(t))$ (二维 Markov 随机过程)的概率密度函数

$$Q(a, \varphi) = C \exp \left(\int \frac{\partial u}{\partial a} da + \frac{\partial u}{\partial p} d\varphi \right)$$
 (2-88)

其中, C 为归一化常数。

2.4.4 随机动力系统的增维精细积分法

考虑随机非线性动力系统(lio 随机微分方程)

$$\dot{X} = F(X, t, \psi(t)) \tag{2-89}$$

其中 $X \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, $\psi(t)$ 为 m 维随机向量, 可以记为

$$\psi(t) = [\zeta_1(t) \quad \zeta_2(t) \quad \cdots \quad \zeta_n(t)]^T$$

并设 ζ₁(t),ζ₂(t),…,ζ₄(t)为相互独立的标准 Gauss 白噪声,即有

 $E[\zeta_1(t) \quad \zeta_2(t+\tau)] = \delta_{\bar{\tau}}(\tau)$ 已知 $X(t) = [X_1(t) \quad X_2(t) \quad \cdots \quad X_r(t)]^T$ 为状态过程(查量)、将 F(X,t,w(t))改写

口知 $\mathbf{A}(t) = [A_1(t) \quad A_2(t)] \quad \cdots \quad A_n(t)]$ 为机态过程(灾量), 特 $\mathbf{F}(\mathbf{A}, t, \boldsymbol{\psi}(t))$ 及与

$$F(X, t, \psi(t)) = A(X, t, \psi(t))X + \phi(X, t, \psi(t))$$
 (2-90)

上式中的 $A(X,t,\psi(t))$ 与 $\phi(X,t,\psi(t))$ 可能皆显含随机项 $\psi(t)$ 。

引入变量 X...=1,则有 X...=0,将原系统改写为齐次形式:

$$\dot{Y} = \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{X}_{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \phi \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ X_{-1} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} X \\ X_{-1} \end{bmatrix} = BY$$
 (2-91)

上式在形式上已化为线性齐次方程,记时间步长为 τ , $t_k = k \tau$, 在很小的时间间隔[t_{k-1} , t_k]内, 矩阵 B 的变化很小, 即式(2-91) 可以改写为

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{B}_{k-1} \mathbf{Y} \tag{2-92}$$

其中 $Y = [X, X_{-1}]^T$, $B_{k-1} = B[(k-1)_T], k = 1, 2, \dots, p_n$

在此要模拟出各个节点处的 $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, \cdots , $\xi_n(t)$ 的值, 并与 $t_{k-1} = (k-1)\tau$, Y_{k-1} 的值 一同代人, 计算矩阵 B_{k-1} 。 在模拟计算 $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, \cdots , $\xi_n(t)$ 的值时, 采用 Box-Muller 法模拟 标准高斯白噪声,具体做法如下。

设随机变量 4, 在(0,1)服从均匀分布,构造随机数序列[5]:

$$\xi_j^{k-1} = \sqrt{-2 \ln u_{k-1}} \cos(2\pi u_k)$$

$$\theta_{i}^{\lambda} = \sqrt{-2\ln u_{i}} \cdot \sin(2\pi u_{i})$$

其中, $j=1,2,\cdots,m,k$ 的取值应保证 $|\xi_i^*|$ 中有 p 个随机量。

对于每一个j值、 u_a 的值是每次要剔新重取的,以保证 $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, \cdots , $\xi_n(t)$ 的独立性。这样可以在一个时间步长内对式(2-92)进行精细积分,在区间[t_{a-1} , t_a]上,式(2-92)的解可以表示为

$$Y(k_T) = \exp[\tau B_{k-1}]Y[(k-1)\tau] = \left(\exp\left[\frac{\tau}{a}B_{k-1}\right]\right)^{q}Y[(k-1)\tau]$$
 (2-93)

其中 $q=2^{g}$,并设 $\Delta t=\frac{\tau}{a}$,则可得如下表达式:

$$\exp[\Delta t B_{k-1}] \approx E + \Delta t \cdot B_{k-1} + \frac{(\Delta t \cdot B_{k-1})^2}{2!} = E + Q,$$
 (2-94)

其中 $Q_t = \Delta t \cdot \boldsymbol{B}_{k-1} + \frac{(\Delta t \cdot \boldsymbol{B}_{k-1})^2}{2!}$ 。

$$i \not Q \quad Q_{k-1} = \exp[\tau B_{k-1}] = (E + Q_s)^{p^k}$$

$$= (E + Q_s)^{p^{k-1}} (E + Q_s)^{p^{k-1}}$$

$$= (E + (2Q_s + Q_s^2))^{p^{k-1}}$$
(2-95)

所以进行这样的迭代: $Q_1 = 2Q_2 + Q_2^2$,其中, $Q_2^2 = Q_2 \cdot Q_2$ 为矩阵的幂。

所以近行这样的这代。 $V_1 = 2V_1 + V_2$,共行, $V_2 = V_3$,及已行即带。 计算 Q_{k-1} 的迭代流程图如图 2-15 所示。当循环结束时,得到式(2-94)中的迭代矩阵,即

有
$$Y(k\tau) = O_{k-1}, Y[(k-1)\tau], k=1,2,\dots,p$$



按照以上算法可编制计算机程序完成计算 「作。

注章:

①若可将 $A(X, \iota, \psi(\iota)), \Phi(X, \iota, \psi(\iota))$ 写为确定与随机两部分之和.即

$$A(X, t, \psi(t)) = A_t(X, t) + A_2(X, t, \psi(t))$$

$$\Phi(X, t, \psi(t)) = \Phi_t(X, t) + \Phi_t(X, t, \psi(t))$$

则矩阵 B 可以相应地写成确定部分矩阵 B_D 与随机部分矩阵 B_S 的和。即

$$B = B_n + B_s$$

图 2-15 计算迭代矩阵 Q₈₋₁ 的复杂资程

其中
$$B_D = \begin{bmatrix} A_1 & \Phi_1 \\ A_2 & A_2 \end{bmatrix}$$
, $B_S = \begin{bmatrix} A_2 & \Phi_2 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$.

②者①中的随机部分矩阵 $B_5=0$,则式(2-89)转为确定系统,即在随机增维精细积分算法中去掉随机部分的内容(所有随机项的系数全取为零)、同样可计算确定系统的数值解。

2.4.5 随机增维精细积分法应用举例

本节举例说明随机增维精细积分法的使用,同时与相应的确定系统进行比较,以期形象地 展示随机动力系统性态的复杂性。

已知有二维随机动力系统(Ito 随机微分方程)

$$\begin{vmatrix}
\dot{x}_1 = x_2 + 2\xi_1(t) - 0.1x_2\xi_2(t) \\
\dot{x}_2 = -0.3x_2 + x_1 - x_1^3 + \mu\cos(1.2t) + 3x_1\xi_1(t)\sin(2t)
\end{vmatrix}$$
(2-96)

其中 ξ(t)(i=1,2,3) 为独立的零均值标准 Galass 白噪声。

在此可取

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 - x_1^2 & -0.3 \end{bmatrix}, \Phi = \begin{bmatrix} 2\xi_1(t) - 0.1x_2\xi_2(t) \\ \mu\cos(1.2t) + 3x_1\xi_1(t)\sin(2t) \end{bmatrix}$$

即矩阵

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2\xi_1(t) - 0.1x_2\xi_2(t) \\ 1 - x_1^2 & -0.3 & \mu\cos(1.2t) + 3x_1\xi_1(t)\sin(2t) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

当然 B 也可以写作

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_{\mathrm{D}} + \boldsymbol{B}_{\mathrm{S}}$$

$$\begin{tabular}{ll} $\not \Xi_{\rm D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1-x_1^2 & -0.3 & \mu\cos(1.2t) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, $B_{\rm S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2\xi_1(t) - 0.1x_2\xi_1(t) \\ 0 & 0 & 3x_1\xi_1(t)\sin(2t) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \label{eq:BD}$$

随机系统(2-96)的相应的确定系统为

$$\dot{x}_1 = x_2$$

 $\dot{x}_2 = -0.3x_1 + x_1 - x_1^3 + \mu \cos(1.2t)$
(2-97)

系统(2-97)为一个典型的受外灌肠的 $D_{\rm effing}$ 7 $\overline{n}_{\rm eff}$ 以 μ 为分参数、分析系统(2-97)的 性态可知,系统存在-1,2-4.8周期分岔以及混沌态等各种响应,而响应的随机系统会是现何种 住态、下面用随机增维精组积分法对系统(2-96)及(2-97)进行数字模拟,比较所得结果、认

识随机动力系统的复杂性。

①当分岔参数 μ = 0.286 7 时,系统(2-97)的确定系统具有 4 周期分岔,而相应的随机系统 有极为混乱的相阻与时程图(以下随机系统的数据中为某次模拟的结果),如图 2-16、图 2-17 所示。

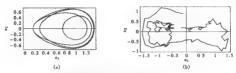


图 2-16 确定系统与随机系统在 $\mu = 0.2867$ 的相图比较($p = 160, \tau = 0.13$)

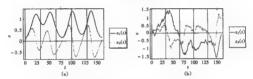


图 2-17 确定系统与随机系统的状态变量 z_1 、 z_2 在 μ = 0.286 7 时的时程图(p = 160、 τ = 0.13)

②当分岔参数 μ = 0.287 106 时,确定系统具有 8 周期分岔,而相应的随机系统却有极为混乱的相图与时程图(以下随机系统的数据中为某次模拟的结果),如图 2-18、图 2-19 所示。

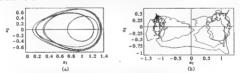


图 2-18 确定系统与随机系统在 μ = 0.287 106 时的相图比较(ρ = 320, τ = 0.130 718 29) (a)确定系统(b)确机系统

③当分岔参数 μ=0.32 时,系统(2-97)呈混沌态,而相应的随机系统的状态变量却有极为 混乱的激增或骤减的相图(随机系统的数据中为某次模拟的结果),如图 2-20、图 2-21 所示,

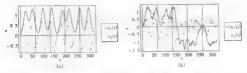


图 2-19 确定系统与随机系统的状态变量 x_1, x_2 在 $\mu=0.287$ 106 时的时程图($p=320, \tau=0.130.718.29$)

这正充分说明了确定系统在受到随机激励后具有极大的不确定性



图 2-20 确定系统 与随机系统存 µ = 0 32 时的相图化较(p = 1 000, r = 0 2)
(a)确定系统(b)随机系统

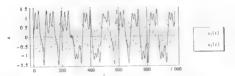


图 2-21 确定系统的状态变量 z_1, z_2 在 $\mu = 0.32$ 时的时程图($p-1000, \tau = 0.2$)

本节介绍的随机增维精辐积分法对随机向量的维数以及随机项的强度营资有限制。随机 项格型可以是非白噪声项,如有界实噪声等皆可 在进行数了模拟时,改变相应的随机项产 年积序即可。

通过应用随机增维精细积分法对醣机系统的数字模拟。可以看到原来具有规律性演化的 确定动力系统,在受到随机激励后常常会失去原有的规律而出现极为混乱状态,是否还有概率 意义上的规律可寻,这还需要作足够量(次数)的模拟以及理论上的分析才能得出结论。

通过以上举例,将随机系统与确定系统进行对比,说明本节建立的随机增维精细积分法可 作为数字模拟随机动力系统演化的行之有效的方法之一

第3章 数值计算及模拟

3.1 数值计算方法

3.1.1 教信计算方法的研究对象与特点

数值计算方法,数学工作者称之为数值分析,它是应用数学尤其是计算数学的一个主要分 支。而计算数学是研究用计算机识解各种数学问题的数值计算方法及其理论与软件实现。用 计解和继非验验计算问题 - 即移行物 FL 小讨殴。

实际问题→数学模型→数值计算方法→程序设计→上机计算求出结果。

由实际问题的提出到上机求得问题的解答的整个过程都可以看作是应用数学的范畴。如 果细分的话。应用相关科学知识和数字题论整立模型这一过程、通常作为应用数学的任务。对 于数值分析非数学专业的学者常称之为数值计算方法、要完成由模型到计算得到结果的全过 聚 需果 许注 4 k % 占。

①面向计算机,要根据计算机特点提供切实可行的有效算法:

②有可靠的理论分析,能任意通近并到达精度要求,对近似算法要保证收敛性和數值稳定性,不要对误差进行分析,它关系到算法能否在计算机上实现;

③要有好的计算复杂性,时间复杂性好是指节约时间,空间复杂性好是指节约存储量,这 他身体立算法要研究的问题,它关系到算法能否在计算机上实现;

④要有数值实验,即任何一个算法除了从理论上要满足上述3点外,还要通过数值实验证 明基行之有效的。

人们在科学研究中,往往会建立各种形式的动力系统,而其中相当一部分经过适当的转化 后都会化成求解常微分方程的定解问题。这类问题最简单的形式是如下一阶方程的初值问题。

$$y' = f(x, y)$$

 $\gamma(x_0) = \gamma_0$

$$(3-1)$$

已知只需函数 f(x,y)适当光槽,如关于y 满足利誉希茨(Lipshchite)条件 $|f(x,y)-f(x,y)-f(x,y)| < Liy - <math>\bar{y}$ 1, 理论: 號可保证式(3-1)的幣 y=y(x)存在并且唯一。且有多种求解常微分方程的解析方法、但解析方法只适用于求解一些特殊类型的方程,实际问题中归结出的微分方程 更多始只惟用敷值方法条件。

所谓数值解法,就是计算解 y(x) 在海增的离散节点 $x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots$ 上的近似值 $y_1, y_2, \cdots, y_n, y_{n+1}, \cdots$ 。相邻两个节点的问题 $h_n = x_{n+1} - x_n$ 称为步长。此后如无特别说明,总 假定 $h_i = h(i = 1, 2, \cdots)$ 为定值, 即 $x_n = x_0 + nh$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ 。

初值问题的數值解法有个基本特点,即采取"步进式",求解过程顺着节点排列的次序一步一步地向前推进。描述这类算法,只需给出用已知信息 y, y, 1, y, 2, …计算 y, 1, 的递推公

£.

3.1.2 简单的数值方法与基本概念

1 微拉(Fuler) 法与后误数拉法

$$y_{s+1}$$
),显然两个顶点 P_s 、 P_{s+1} 的坐标有关系 $\frac{y_{s+1}-y_s}{x_{s+1}-x_s}=f(x_s,y_s)$,即有

这就是签名的欧拉公式。若初值 va 已知,公式(3-2)可逐步算出

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0), y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1), \cdots$$

例 3.1 求解初俏问题

$$y' \approx y - \frac{2\pi}{y}$$
 (0 < x < 1)
 $y(0) = 1$ (3-3)

(3-2)

解:用欧拉方法,欧拉公式的具体形式为

$$y_{n+1} = y_n + h \left(y_n - \frac{2x_n}{y_n} \right)$$

 $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$

取步长 h=0.1,计算结果见表 3-1。

s _b	у,	y(x _k)	z _n	y _n	y(x,)
0.1	1,100 0	1.095 4	0.6	1 509 0	1 483 2
0.2	1.191 8	1.183 2	0.7	1.580 3	1.549 2
0.3	1.277 4	1.264 9	0.8	1.649 8	1.612 5
0.4	1.358 2	1.341 6	0.9	1.717 8	1.673 3
0.5	1.435 1	1.414.2	1.0	1.784 8	1.732 1

表 3-1 计算值展对比

初值问题(3-3)有解析解 $y = \sqrt{1+2x}$,由解析式算出的准确值 $y(x_n)$ 问近似值 y_n 比较可 以看出版的方法的辩审较差。

为了分析计算公式的精度,通常可用泰勒展开公式将 y(za,))在 za 处展开,则有

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{h^2}{2}y''(\xi_n), \xi_n \in (x_n, x_{n+1})$$

在 $y_n = y(x_n)$ 的前提下, $f(x_n,y_n) = f(x_n,y(x_n)) = y'(x_n)$ 。于是可得公式(3-2)的误差为

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{h^2}{2} y''(\xi_n) \approx \frac{h^2}{2} y''(x_n)$$
 (3-4)

该设差称为欧拉法的局部截断误差。

如果对方程(3-1)从 z。到 z。,,积分,得

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{-\infty}^{n+1} f(t, y(t)) dt$$
 (3-5)

右端积分用左端矩形 $b(x_n, y(x_n))$ 近似,再以 y_n 代替 $y(x_n), y_n$.,代替 $y(x_{n+1})$,也得到武(3-2)且局部截断误差也是式(3-4);如果在式(3-5)中右端积分用右端矩形 $b(x_{n+1}, y(x_{n+1}))$ 近 化、则得另一个公式

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$$
 (3-6)

该式称为后退欧拉公式。

后退取拉公式与欧拉公式有着本质的区别,后者是关于 y_{x+1}的一个直接的计算公式,这类公式称作是显式的;然而公式(3-6)的右端含有未知的 y_{x+1},它实际上是关于 y_{x+},的一个函数 方程,这类公众称作是隐式的。显式与隐式两类方弦名有物点。考虑到数值稳定性等其他因 京,人们有时需要选用隐式方法。但使用显式算法远比隐式方便。隐式方程(3-6)通常用迭代 法求解。而某代计程的实质是逐步显式化。

法求解,而迭代过程的实质是逐步显式化。 设用取拉公式 $y_{*,1}^0 = y_* + bf(x_*, y_*)$,给出迭代初值 $y_{*,1}^{(0)}$,用它代人式(3-6)的右端,使之 转化为显式,直接计算得 $y_{*,1}^{(0)} = y_* + bf(x_{*,1}, y_{*,1}^{(0)})$;然后再用 $y_{*,1}^{(0)}$ 代人式(3-6),又有 $y_{*,1}^{(0)} = y_* + bf(x_{*,1}, y_{*,1}^{(0)})$,如此反复进行,得

$$y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)}) \quad (k = 0, 1, \cdots)$$
 (3-7)

由于 f(x,y)对 y 满足利普希茨条件,由式(3-7)减式(3-6)得

$$|y_{n+1}^{(k+1)} - y_{n+1}| = h |f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)}) - f(x_{n+1}, y_{n+1})| \le hL |y_{n+1}^{(k)} - y_{n+1}|$$

式中, L 为f(x,y)关于 y 的利普希茨常敷。由此可知, 只要 kL < 1 迭代法(3-7) 就收斂到鄉 $y_{k+1,0}$ 关于后退欧拉方法的公式误差, 从积分公式看到它与欧拉法是相似的。

2. 梯形方法

为得到比歇拉法特度高的计算公式,在等式(3-5)右端积分中若用梯形求积公式近似,并用 y_x 代替 $y(x_x),y_{x_x}$ 代替 $y(x_{x_x}),y_{x_x}$ 代替 $y(x_{x_x})$,则得

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$$
 (3-8)

该式称为梯形方法。梯形方法是隐式单步法,可用迭代法求解。同后退的歇拉方法一样,仍用 欧拉方法提供迭代初值,则梯形方法的迭代公式为

为了分析迭代过程的收敛性,将式(3-8)与式(3-9)相减,得

$$y_{n+1} - y_{n+1}^{(k+1)} = \frac{h}{2} [f(x_{n+1}, y_{n+1}) - f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)})]$$

于是有 $|y_{n+1} y_{n+1}^{(k+1)}| \le \frac{hL}{2} |y_{n+1} y_{n+1}^{(k)}|$,式中 L > f(x,y)关于 y 的利普希茨常數。如果选

取 h 充分小,使得 $\frac{hL}{3}$ <1,则当 $k\to\infty$ 时有 $y_{n+1}^{(4)}\to y_{n+1}$,这说明迭代过程式(3-9)是收敛的。

3. 单步法的黑部装新译单与阶

初值问题式(3-1)的单步法可用一般形式表示为

(3-10)

 $y_{n+1} = y_n + h\varphi(x_n, y_n, h)$ $\phi(x,v,h)$ 称为增量项数、如对欧拉法式(3-2)有 $\phi(x,v,h)=f(x,v)$ 。它的局部截断误类已 由式(3-4)給出,对一般显式单步法则可如下定义。

定义 3.1 设 γ(x)是初值问题式(3-1)的准确解。

$$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - y(x_n) - h\varphi(x_n, y(x_n), h)$$
 (3-11)

称为显式单步法式(3-10)的局部截断误差。

 $T_{*,*}$ 之所以称为局部的,是假设在 z_* 前各步没有误差。当 $y_* = y(z_*)$ 时,计算一步,则有

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = y(x_{n+1}) - [y_n + h\phi(x_n, y_n, h)]$$

= $y(x_{n+1}) - y(x_n) - h\phi(x_n, y(x_n), h) = T_{n+1}$

所以,局部裁断退去可理解为用式(3-10)计算一步的误差,即公式(3-10)中用准确解 v(x)代 被教信解产生的公式误差。根据定义,显然欧拉法的局部截断误差

$$T_{n+1} = \gamma(x_{n+1}) - \gamma(x_n) - hf(x_n, \gamma(x_n)) = \frac{h^2}{2} y''(x_n) + O(h^2)$$

即为式(3-4)的结果。这里 $\frac{\hbar^2}{2}$ $y''(x_a)$ 称为局部截断误差主项。显然 $T_{a+1} = O(\hbar^2)$,一般情形的 定义如下。

定义 3.2 设 γ(x)是初值问题式(3-1)的准确解,若存在最大整数 p 使显式单步法式(3-10)的局部截断误差满足

$$T_{x+1} = y(x+h) - y(x) - h\varphi(x,y,h) = O(h^{p+1})$$
 (3-12)

则称式(3-10)具有 p 阶精度。

若将式(3-12) 展开式写成

$$T_{n+1} \approx \psi(x_n, \gamma(x_n))h^{n+1} + O(h^{n+2})$$

馴称 $\phi(x_{-}, v(x_{-})) h^{r+1} 为局部截断误差主项。$

以上定义对隐式单步法式(3-6)也是适用的。

例如,对后退欧拉法式(3-6)局部截断误差

$$T_{n+1} = -\frac{h^2}{2}y(s_n) + O(h^2)$$

即 p=1,是 1 阶方法,局部截断误差主项为 $-\frac{h^2}{2}y''(s_n)$ 。

同样对梯形法式(3-8)有

$$T_{n+1} = y(x_{n+1}) - y(x_n) - \frac{h^2}{2} [y'(x_n) + y'(x_{n+1})] = -\frac{h^2}{12} y'''(x_n) + O(h^4)$$

所以梯形方法式(3-8)是2阶的,其局部截断误差主项为 $-\frac{h^2}{12} \gamma^{-}(z_a)$ 。

4. 改併的歐拉公式

显然,梯形方法虽提高了精度但其算法复杂,在应用迭代公式(3-9)进行计算时,每迭代一次都要重新计算函数 f(x,y)的值。而迭代又要反复进行若干改、计算量很大,而且往往难以预测。为了控制计算置 通常只迭代一两次就转入下,步的计算,这就简化了算法。具体地说、先用欧拉公式求得一个初步的近似值_{2**}1,称之为预测值,预测值7***。1 的特度可能很差,再用梯形公式(3-8)特它校正一次,即按式(3-9)迭代一次得 y****,12 公场果称为校正值,而这样建立的管侧一校下系统通常数为政治的股份公式(预估校下公式):

$$\frac{\overline{y}_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) (\overline{M} f_0)}{y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})] (\overline{W} \overline{E})}$$
(3-13)

例 3.2 用改进的欧拉方法求解初值问题式(3-3)

例 3.1 中欧拉法的计算结果比较,改进欧拉法明显改善了精度。

х,	y,	y(x _n)	I,	y _e	y(s,)
0.1	1.095 9	1.095 4	0.6	1.486 0	1.483 2
0.2	1.184 J	1.183 2	0.7	1.552 5	1.549 2
0.3	1.266 2	1.264 9	0.8	1.615 3	1.616 5
0.4	1.343 4	1.341 6	0.9	1.678 2	1.673 3
0.5	1.4164	1.414 2	1.0	1.737 9	1.732 1

衰 3-2 计算结果对比

3.1.3 龙格-库塔方法

龙格·库塔方法(Runge-Kutta)正是數学軟件 Matlab(ode23,ode45)与 Mathematica(NDSolve) 中使用的解像分方程的數值方法。

1. 显式龙格-库塔法的一般形式

上节给出了显式单步法的表达式(3-10),其局部截断误差为式(3-12),对欧拉法 $T_{**1} = O(h^2)$,即方法为 p=1 阶,若用改进级拉法式(3-13),它可表为

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))]$$
 (3-14)

此时增量函数

$$\varphi(x_n, y_n, h) = \frac{1}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))]$$
(3-15)

它比欧拉法的 $\varphi(z_n,y_n,h)=f(z_n,y_n)$ 增加了计算一个右函数 f 的值。若要使得到的公式阶

数 p 更大, φ 就必须包含更多的f值。实际上从方程(3-1)等价的积分式(3-5)可以看出,若要使公式阶数提高,就必须使右端积分的数值求积公式精度提高,这必然要增加求积节点。为此

可將式(3-5)中的求积公式近似表示为 $\int_{a}^{x+1} f(x,y(x))dx = h \sum_{i=1}^{r} c_i f(x_a + \lambda_i h, y(x_a + \lambda_i h))$

般来说点數 r越多,轉度越高。 上式右端相当于增量函數 $\varphi(x,y,h)$,为得到便于计算的整式 方法,可类似于改进跌拉法,将公式(3-14)表示为

$$y_{n+1} = y_n + h\phi(x_n, y_n, h)$$
 (3-16)

其中

$$\varphi(x_n, y_n, h) = \sum_{i=1}^{r} c_i K_i,$$
 (3-17)

$$K_1 = f(x_n, y_n), K_i = f(x_n + \lambda_i h, y_n + h \sum_{i=1}^{i-1} \mu_{ij} K_j), i = 2, \dots, r$$

这里 c_1 、 λ_1 、 μ_2 均为常数。式(3-16)、式(3-17)称为 r 阶显式龙格-库塔法,简称 R-K 方法。

当 r=1, $\varphi(x_n,y_n,h)=f(x_n,y_n)$ 时, R-K 方法就是欧拉法,此时方法的阶数 p=1。

当 r=2,要使公式(3-16)、式(3-17)具有更高的阶 p,就要增加点数 r。

在此給出 r=2、3、4 时的常用 R-K 公式。

(1)2 阶显式 R-K 方法

对 r=2的 R-K 方法,由式(3-16)、式(3-17)可得到如下的计算公式:

$$y_{n+1} = y_n + h(c_1 K_1 + c_2 K_2)$$

 $K_1 = f(x_n, y_n)$
 $K_2 = f(x_n + \lambda_2 h, y_n + \mu_{21} hK_1)$
(3-18)

这里 $c_1, c_2, \lambda_2, \mu_1$ 均为特定常數,通常希望适当选取这些系數,使公式阶數 p 尽量高。若设 $c_1 = a \neq 0$,则得 $c_1 = 1 - a, \lambda_2 = \mu_1 = \frac{1}{a}$,这样得到的公式称为 2 阶 R-K 方法。

若取
$$a=\frac{1}{2}$$
,则 $c_1=c_2=\frac{1}{2}$, $\lambda_2=\mu_{21}=1$,这就是改进欧拉法式(3-14)。

若取 a=1,则 $c_2=1$, $c_1=0$, $\lambda_2=\mu_{21}=\frac{1}{2}$,得计算公式

$$y_{n+1} = y_n + hk_2$$
.
 $K_1 = f(x_n, y_n)$
 $K_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1\right)$
(3-19)

称为中点公式,相当于数值积分的中矩形公式。

式(3-19)也可表示为 $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \int (x_n + h, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n))$,可以证明 r = 2 的显式 R-K 方块的阶目能是 2.而不能得到 3 阶公式。

· (2)3 阶与4 阶显式 R-K 方法

当 r=3 时,式(3-16)、式(3-17)的公式表示为

(3-21)

$$y_{n+1} = y_n + h \left(c_1 k_1 + c_2 k_2 + c_3 k_3\right)$$

 $K_1 = f(x_n, y_n)$
 $K_2 = f(x_n + \lambda_2 k_1, y_n + \mu_{21} hK_1)$
 $K_3 = f(x_n + \lambda_2 k_1, y_n + \mu_{21} hK_1)$
 $K_3 = f(x_n + \lambda_2 k_1, y_n + \mu_{21} hK_1)$ (3-20)

其中 c_1 、 c_2 、 c_5 及 λ_2 、 μ_2 、 λ_3 、 μ_2 、 μ_2 均为待定参数,当公式(3-20)的局部截断误差 $T_{a+1} = O(\Lambda^4)$ 时,可得到去于 3 阶 R-K 公式,其中常用的公式为

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (K_1 + 4K_2 + K_3)$$

$$K_1 = f(x_n, y_n)$$

$$K_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1\right)$$

$$K_3 = f(x_n + h, y_n + hK_1 + 2hK_2)$$

当 r = 4 时,常用的 4 阶 扩格- 库塔公式中最经典的一个为

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{G} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$
 $K_1 = f(x_n, y_n)$
 $K_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1\right)$
 $K_3 = f\left(x_n + \frac{h}{m}, y_n + \frac{h}{m}K_2\right)$

 $K_t = f(x_0 + h, y_0 + hK_1)$

四阶 龙格·库塔方法的每一步需要计算 4 次函數值 f, 可也证明其轍斯误差为 $O(h^2)$ 。 用 4 阶 龙格·库塔方法求解初值问题(式(3-3)), 并设步长 h = 0.2, 从 x = 0 直到 x = 1, 则 经奥的 4 阶 龙格·库塔公式(3-21) 具有形式

$$\begin{split} y_{s+1} &= y_s + \frac{h}{6} \left(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4 \right) \\ K_1 &= y_s - \frac{2x_s}{y_s} \\ K_2 &= y_s + \frac{h}{2} K_1 - \frac{2x_s + h}{y_s + \frac{h}{2} K_2} \\ K_3 &= y_s + \frac{h}{2} K_3 - \frac{2x_s + h}{y_s + \frac{h}{2} K_3} \\ K_4 &= y_s + hK_3 - \frac{2(x_s + h)}{y_s + hK_1} \end{split}$$

表 3-3 列出计算结果 y_n, 表中 y(x_n)仍表示准确解。

衰3-3 计算结果					
<i>z</i> ₁	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
Уn	1.183 2	1.341 7	1 483 3	1.612 5	1.732 1
$y(x_n)$	1.183 2	1.341 6	1.483 2	1.612 5	1 732 1

比较例 3 和例 2 的计算结果,显然以宽格-库塔方法的精度为高。要注意,虽然 4 阶龙格-库塔方法的计算 版 每一步要 4 次计算 函数 广比改适的欧北方法(仑是一种 2 阶龙格-库塔方 法,每一步只要 2 次计算 函数 广大一倍,但由于这里放大了步长(A=0,2),表 3-3 和表 3-2 所 新╋的计算 屬几乎相同。这个侧子两一次显示了选程施;於的重要查 2

(3)变步长的龙格-库塔方法

若只是从每一步看,步长越小,觀斷误差就越小。但隨着步长的缩小,在一定水解范围内 所要完成的步數試補加了,步數的增加不但引起計算量的增大,而且可能导致会入误差的严重 积累。因此,同积分的数值计算一样,微分方程的数值解法也有个选择步长的问题。在选择步 长时,需要考虑两个问题;①怎样衡量和检验计算结果的精度;②如何依据所获得的精度处理 步长。

3.1.4 线性多步法

在近用數值方法进行求解的过程中,计算 y_{xx};之前已经求出了一系列的近似值 y_x,y_x, 次者能充分判削前多步的信息来预测 y_{xx},则可望获得较高精度的近似解,这就是构造 物性宏步法的基本图相。

构造多步法的主要途径有利用數值积分方法和利用泰勒级數展开方法,前者可直接由方 程(3-1)两端积分后利用極值求积公式得到。本节主要介绍基于泰勒展开的构造方法。

1. 维性多步法的一般公式

如果计算 $y_{n,k}$ 时,除用 y_{n+k-1} 的值,还用到 $y_{n,i}$ ($i=0,1,\dots,k-2$)的值,则称此方法为线 性多步法。一般的线性多步法公式可表示为

$$y_{n+k} = \sum_{i=0}^{k-1} a_i y_{n+i} + h \sum_{i=0}^{k} \beta_i f_{n+i}$$
(3-22)

定义 3.3 设 y(x) 是初值问题(3-1)、(3-2)的准确解,线性多步法(3-22)在 x_{a+1} 上的局部 截断误差为

$$T_{y+k} = L[y(x_k); h] = y(x_{k+k}) - \sum_{i=0}^{k-1} a_i y(x_{k+1}) - h \sum_{i=0}^{k} \beta_i y'(x_{k+1})$$
(3-23)

若 $T_{***i} = O(h^{p+1})$,则称式(3-22)是 p 阶的,若 $p \ge 1$ 则称式(3-22)与方程(3-1)是相容的。可以证明名先注式(3-22)与微分方程(3.1)相容的充分必要条件是下式成立。

$$a_0 + a_1 + \dots + a_{k-1} = 1$$

$$\stackrel{i-1}{\sum} ia_i + \sum_{\beta} \beta_i = k$$
(3-24)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f_n + f_{n+1})$$

即为梯形法。下面给出着干常用的多步法的具体公式。

2、阿当姆斯里式与隐式公式

形如

$$y_{n+k} = y_{n+k-1} + h \sum_{i=1}^{k} \beta_i f_{n+i}$$
 (3-25)

的 k 步法, 称为阿当姆斯(Adams)方法。 $\beta_k = 0$ 为显式方法, $\beta_k \neq 0$ 为脆式方法,通常称为阿当姆斯曼式公式与脆式公式。

当 8. = 0 时,可以得到 k = 3 时的阿当维斯曼式公式

$$y_{n+3} = y_{n+2} + \frac{h}{12}(23f_{n+2} - 16f_{n+1} + 5f_n)$$
 (3-26)

它是 3 阶方法,局部截断误差是 $T_{a+3} = \frac{3}{9} h^4 y^{(4)}(z_a) + O(h^5)$ 。

当 8, ≠0 时, 可得 k=3 时的阿当姆斯隐式公式

$$y_{n+3} = y_{n+2} + \frac{h}{24}(9f_{n+3} + 19f_{n+2} - 5f_{n+1} + f_n)$$
 (3-27)

它是4阶方法,局部截断误差是 $T_{n+3} = -\frac{19}{720}h^5y^{(5)}(x_n) + O(h^6)$ 。

表 3-4 与表 3-5 分别列出了 k=1,2,3,4 时的阿当姆斯显式公式与阿当姆斯雕式公式,其中 k 为步数,p 为方法的阶,c...)为误差常数。

表 3-4 阿当姆斯里式公式

Ŀ	P	全 式	c _{p+1}
1	1	$y_{n+1} = y_n + i f_n$	1/2
2	2	$y_{n+2} = y_{n+1} + \frac{h}{2}(3f_{n-1} - f_n)$	5 12
3	3	$y_{n+2} = y_{n+2} + \frac{h}{12} (23f_{n+2} - 16f_{n+1} + 5f_n)$	3 8
4	4	$y_{n+4} = y_{n+3} + \frac{h}{2h} (55f_{n+3} - 99f_{n+2} + 37f_{n+1} - 9f_n)$	251 720

	(単分ハゴ

k	p	全 类	C _{p+1}
1	1	$y_{a+1} = y_a + \frac{h}{2} (f_{a+1} + f_a)$	- 1/12
2	2	$y_{h+2} = y_{h+1} + \frac{h}{12} \langle 5f_{h+2} + 8f_{h+1} - f_n \rangle$	
3	3	$y_{n+2} = y_{n+2} + \frac{h}{24}(9f_{n+2} + 19f_{n+2} - 5f_{n+1} + f_n)$	$-\frac{19}{720}$
4	4	$y_{n+4} = y_{n+3} + \frac{h}{720} (231f_{n+4} + 646f_{n+3} - 264f_{n+2} + 106f_{n+1} - 19f_n)$	- 3 160

3.米尔尼方法、辛普森方法及汉明方法

考虑与式(3-25)不同的另一个 k=4 的显式公式

$$y_{n+4} = y_n + h(\beta_3 f_{n+3} + \beta_2 f_{n+2} + \beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n)$$

其中 β_0 、 β_1 、 β_1 、 β_2 为符定常数,可根据使公式的阶尽可能高这一条件来确定其数值。学者米尔尼(Milne)得到如下公式;

$$y_{n+4} = y_n + \frac{4h}{3}(2f_{n+3} - f_{n+2} + 2f_{n+1})$$
 (3-28)

称为米尔尼方法,该方法为4阶的,其局部截断误差

$$T_{n+4} = \frac{14}{45}h^5 y^{(5)}(x_n) + O(h^6)$$

类似地,有一隐式二步4阶方法——辛普森(Simpeon)方法,即

$$y_{n+2} = y_n + \frac{h}{3}(f_n + 4f_{n+1} + f_{n+2})$$
 (3-29)

其局部截断误差

$$T_{a+2} = -\frac{h^5}{90} \gamma^{(5)}(x_n) + O(h^6)$$

辛普森公式是二步方法中阶數最高的,但其確定性较差,为改善稳定性,另有一类三步法公式,称之为权明(Harsming)方法,即

$$y_{n+3} = \frac{1}{9}(9y_{n+2} - y_n) + \frac{3h}{9}(f_{n+3} + 2f_{n+2} - f_{n+1})$$
 (3-30)

该方法是4阶的,且局部截断误差

$$T_{n+3} = -\frac{h^5}{40}y^{(5)}(x_n) + O(h^6)$$

4.预测一校正方法

对于隐式的线性多步法,计算时要进行选代,计算量较大。为了避免进行迭代,通常采用 显式公式给出 $y_{*,*}$ 的一个初始近似值,记为 $y_{*,*}^{(0)}$,称为预测(predictor),接着计算 $f_{*,*}$ 的值 (evaluation),再用隐式公式计算 $y_{*,*}$,称为校正(corrector)。例如在式(3-13)中用欧拉法做预 测,再用棉形法校正,得到改进欧拉法,这就是一个2阶预测 校正方法。一般情况下,预测公 式与校正公式都取同阶的显式方法与隐式方法。例如用4阶的阿当编斯显式方法做预测,再 用4阶阿当编斯隐式公式整位正,得到以下格式。 预测(P):

$$y_{n+4}^{p} = y_{n+3} + \frac{h}{24}(55f_{n+3} - 59f_{n+2} + 37f_{n+1} - 9f_{n})$$

求值(E):

$$y_{n+4}^p = f(x_{n+4}, y_{n+4}^p)$$

校正(€);

$$y_{n+4} = y_{n+3} + \frac{h}{24} (9f_{n+4}^{*} + 19f_{n+3} - 5f_{n+2} + f_{n+1})$$

求值(E):

$$f_{-14} = f(x_{-14}, y_{-14})$$

此公式称为阿当姆斯 4 阶预测一校正格式(PECE)。

为进一步减小误差还有·种修正预测一校正格式(PMECME)。

P:
$$y_{n+4}^b = y_{n+3} + \frac{h}{2a}(55f_{n+3} - 59f_{n+2} + 37f_{n+1} - 9f_n)$$

M:
$$y_{n+4}^{m} = y_{n+4}^{p} + \frac{251}{270}(y_{n+3}^{c} - y_{n+3}^{p})$$

$$E : \mathcal{E}' := f(x, \dots, x^{n-1})$$

C:
$$y'_{n+4} = y_{n+3} + \frac{h}{24}(9f_{n+4}^m + 19f_{n+3} - 5f_{n+2} + f_{n+1})$$

$$M_1 y_{n+4} = y_{n+4}^c - \frac{19}{270}(y_{n+4}^c - y_{n+4}^s)$$

E:
$$f_{n+4} = f(x_{n+4}, y_{n+4})$$

同理可类似地建立4阶修正米尔尼-汉明预测一校正格式(PMECME)。

P:
$$y_{n+4}^p = y_n + \frac{4}{3}h(2f_{n+3} - f_{n+2} + 2f_{n+1})$$

M:
$$y_{n+4}^{m} = y_{n+4}^{p} + \frac{112}{121}(y_{n+3}^{c} - y_{n+3}^{p})$$

E:
$$y_{n+4}^{pn} = f(x_{n+4}, y_{n+4}^{pn})$$

C:
$$y_{n+4}^c = \frac{1}{8}(y_{n+3} - y_{n+1}) + \frac{3}{8}h(f_{n+4}^m + 2f_{n+3} - f_{n+2})$$

M:
$$y_{n+4} = y_{n+4}^c - \frac{9}{121}(y_{n+4}^c - y_{n+4}^p)$$

E:
$$f_{n+4} = f(x_{n+4}, y_{n+4})$$

3.1.5 方程组和高阶方程

1.一阶方程组

前面讨论了单个方程 y'=f的數值解法,若把 y 和f 视为向量,则所提供的各种计算公式 皆可应用到一阶方程组的情形。

考察一阶方程组

$$y'_{i} = f_{i}(x, y_{1}, y_{2}, \dots, y_{N}), y_{i}(x_{0}) = y_{i}^{0}$$
 (i = 1,2,..., N)

若用向量的记号,记

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T, y^0 = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)^T, f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$$

刚上添加值问题可表示为

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_1) = y_2$$

(3-31)

求解这一初值问题的 4 阶龙格- 库塔公式为

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

式中

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n), k_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_1 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right), k_4 = f(x_n + h_1y_n + hk_2) \end{aligned}$$

或表示为

$$y_{i,n+1} = y_{in} + \frac{h}{6} (K_{i1} + 2K_{i2} + 2K_{i3} + K_{ji})$$
 (i = 1,2,..., N)

其中

$$\begin{split} K_{i1} &= f_i \left(\, x_a \,, \, y_{1a} \,, \, y_{2a} \,, \, \cdots \,, \, y_{3a} \, \right) \\ K_{i2} &= f_i \left(\, x_a \,+ \, \frac{h}{2} \,, \, y_{1a} \,+ \, \frac{h}{2} \, K_{11} \,, \, y_{2a} \,+ \, \frac{h}{2} \, K_{2i} \,, \, \cdots \,, \, y_{3a} \,+ \, \frac{h}{2} \, K_{m} \right) \end{split}$$

$$K_{i3} = f_i \left(\, \, x_n \, + \, \frac{h}{2} \, , \, \gamma_{1n} \, + \, \frac{h}{2} \, K_{12} \, , \, \gamma_{2n} \, + \, \frac{h}{2} \, K_{22} \, , \, \cdots \, , \, \gamma_{Nn} \, + \, \frac{h}{2} \, K_{N2} \, \right)$$

$$K_{N} \approx f_{1}(x_{n} + h, y_{1n} + hK_{13}, y_{2n} + hK_{23}, \cdots, y_{fh} + hK_{fd})$$

y. 为第:个因本書 $_{Y}(x)$ 在节点 $_{X} = x_{0} + nh$ 的近似值。

为了便干理解,先分析两个方程的特殊情形。

$$y' = f(x, y, z)$$

$$z' = g(x, y, z)$$

$$y(x_0) = y_0$$

$$z(x_0) = z_0$$

此时 4 阶龙格-库塔公式具有形式

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

 $z_{n+1} = z_n + \frac{h}{6} (L_1 + 2L_2 + 2L_2 + L_4)$

$$(3-32)$$

其中

$$\begin{split} &K_1 = f(x_n, y_n, z_n), K_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1, z_n + \frac{h}{2}L_1\right) \\ &K_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_2, z_n + \frac{h}{2}L_2\right), K_4 = f(x_n + h, y_n + hK_3, z_n + hL_2) \\ &L_1 = g\left(x_n, y_n, z_n\right), L_2 = g\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1, z_n + \frac{h}{2}L_1\right) \\ &L_3 = g\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_2, z_n + \frac{h}{2}L_1\right), L_4 = g\left(x_n + h, y_n + hK_3, z_n + hL_2\right) \end{split}$$

这是一步法,利用节点 x_a 上的值 y_a 、 x_a ,依次计算 K_1 、 L_1 、 K_2 、 L_2 、 K_3 、 L_2 、 K_4 、 L_4 ,然后代入 式(3-32)即可求得节点 x_a 、 x_a 、 x_a 、 x_a 、 x_a 的值。

2. 化高阶方程为一阶方程组

对于高阶微分方程(或方程组)的初值问题,原则上总可以归结为一阶方程组来求解。例如,考察下列 m 阶微分方程

$$y^{(m)} = f(x, y, y', \dots, y^{(m-1)})$$
 (3-33)

初始条件为

$$y(x_0) = y_0$$

 $y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(m-1)}(x_0) = y_0^{(m-1)}$
(3-34)

引人新的变量

$$y_1 = y, y_2 = y', \dots, y_m = y^{(m-1)}$$

即可将 m 阶方程(3-33)化为如下的一阶方程组:

$$m \text{ or } D \text{ find}(3-35) P(C/N) \text{ as } \Gamma \text{ or } \neg \text{ or } D \text{ find} :$$

$$y'_1 = y_2$$

$$y'_2 = y_3$$

$$\vdots$$

$$y'_{m-1} = y_m$$

$$y'_m = f(x_1, y_1, y_2, \dots, y_m)$$
(3-35)

初始条件式(3-34)则相应单化为

$$\gamma_1(x_0) = y_0$$

 $\gamma_2(x_0) = y_0$
 $\gamma_2(x_0) = y_0$
 \vdots
 $\gamma_{-}(x_0) = \gamma_0^{(n-1)}$
(3-36)

不难证明初值问题式(3-33)、(3-34)和式(3-35)、(3-36)是等价的。

特别他,对于下列二阶方程的初值问题。

$$\begin{cases} y' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

引进新的变量 z = y',即可化为下列一阶方程组的初值问题:

$$\begin{cases} y' = z, \\ z' = f(x, y, z) \end{cases}$$
$$y(x_0) = y_0$$
$$z(x_0) = \gamma'_0$$

针对这个问题应用 4 阶龙格-库塔公式(3-32),有

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{6} (L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4)$$
(3-37)

$$\begin{split} &K_1 = z_a \ , \ L_1 = f(x_a \ , y_a \ , z_a) \\ &K_2 = z_a + \frac{h}{2} \ L_1 \ , \ L_2 = f\left(x_a + \frac{h}{2} \ , y_a + \frac{h}{2} \ K_1 \ , z_a + \frac{h}{2} \ L_1 \right) \\ &K_3 = z_a + \frac{h}{2} \ L_2 \ , L_2 = f\left(x_a + \frac{h}{2} \ , y_a + \frac{h}{2} \ K_2 \ , z_a + \frac{h}{2} \ L_2 \right) \\ &K_4 = z_a + h L_2 \ , L_4 = f(x_a + h \ , y_a + h K_3 \ , z_a + h L_2) \end{split}$$

若消去 K,、K,、K,、M,,则上述格式可表示为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h z_n + \frac{h^2}{6} (L_1 + L_2 + L_3) \\ \\ z_{n+1} = z_n + \frac{h}{6} (L_1 + 2L_2 + 2L_3 + L_4) \end{cases}$$

其中

$$\begin{split} L_1 &= f(x_n, y_n, z_n), L_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}z_n, z_n + \frac{h}{2}L_1\right) \\ L_2 &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}z_n, z_n + \frac{h}{2}L_2\right), L_1 = f(x_n + h, y_n + hz_n, z_n + hL_2) \end{split}$$

3. 刚性方程组

在求解方程组(3-31)时,经常出现解的分量数量级差别很大的情形,这给数值求解带来很 大困难,这种问题称为刚性(stiff)问题,在自动控制、化学反应及电子网络等领域中都是常见 的。先考察以下经典的例子。

对一般的线性系统

$$\frac{dy}{dt} = Ay(t) + g(t) \qquad (3-38)$$

其中 $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n, \mathbf{g} = (g_1, \dots, g_N)^T \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 。 若 \mathbf{A} 的特征值 $\lambda_i = a_i + i\beta_i (j = 1, \dots, N), ij$ 方程组(3-38)的通解为

$$y(t) = \sum_{j=0}^{N} c_{j}e^{\frac{t}{2}} \phi_{j} + \Psi(t)$$
 (3-39)

其中 c_j 为任意常數,可由初始条件 $y(a) = y^0$ 确定, $\Psi(t)$ 为特解。 假设 λ_j 的实部 $\alpha_j = \text{Re}(\lambda_j)$ $< 0. 則当 <math>t \rightarrow \infty$ 时, $\psi(t) \rightarrow \Psi(t)$, $\Psi(t)$ 为稳态解。

定义 3.4 岩线性系統式(3-38)中 A 的特征值 λ_j 満足条件 $\mathrm{Re}(\lambda_j) < 0 (j=1,\cdots,N)$, 且 $s=\max_{\mathbf{N}} \|\mathrm{Re}(\lambda_j)|/\min_{\mathbf{N}} \|\mathrm{Re}(\lambda_j)|$ 为例性方程,称 s 为例性比。

剛性比 s≥l 时,A 为病态矩阵,故刚性方程也称病态方程。通常 s≥10 就认为是刚性的, s 終大病态越严重。

观察 -个经典的刚性系统

$$u' = -1 \ 000.25u + 999.75v + 0.5$$

 $v' = 999.75u - 1 \ 000.25v + 0.5$
 $u(0) = 1$
 $v(0) = -1$ (3-40)

它可用解析方法求出准确解为

$$\begin{cases} u(t) = -e^{-0.5t} + e^{-2.000t} + 1 \\ v(t) = -e^{-0.5t} - e^{-2.000t} + 1 \end{cases}$$

方程右端系数矩阵 $A=\begin{bmatrix} -1\ 000.25 & 999.75 \\ 999.75 & -1\ 000.25 \end{bmatrix}$,其特征值为 $\lambda_1=-0.5<0$, $\lambda_2=0.5<0$

-2000<0,刚性比 $s=\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}=4000>1$,所以式(3-40)为刚性方程。

当 $t\to\infty$ 时, $u(t)\to 1$, $v(t)\to 1$,称为稳态解,可以认为 $e^{-10}\approx 0$,则 u < v 中的快变分量 e^{-2000} 及慢变分量 $e^{-0.5t}$ 趋于零的速度是不同的。

对应于 λ_1 的快速衰减的分量在 t=0.00 s 时已衰减到 $e^{+0}=0$, 称 $\tau_2=-\frac{1}{\lambda_1}=\frac{1}{2\,000}=0.000$ 5 为时间常数; 当 $t=10\tau_1$ 时快变分量即可被忽略。对应于 λ_1 的慢变分量:它的时间常数 $\tau_1=-\frac{1}{\lambda_1}=\frac{1}{0.5}=2$, 它聚计算到 $t=10\tau_1=20$ 时,才能衰减到 $e^{-\alpha}=0$,也就是说解 u、v 必须计算 u $t=10\tau_1=20$ 时,才能衰减到 $e^{-\alpha}=0$,也就是说解 u

求刚性方程数值解时,若用步长受限制的方法,就将出现小步长计算大区间的问题,因此最 好使用对步长, 4 不加限制的方法,前面所介绍的方法中期用于解解性方程的方法很少。通常 求解例性方程的高阶线性多步法是吉尔(Geur)方法,还有隐式龙格-库塔法,这些方法都有相 或的新学数件可供使用。

3.2 数值计算软件及应用

本节主要介绍常用的数值计算软件 Matlab 与 Mathematica。

3.2.1 Matlab 概述

1. Matlab 的概况及发展

20 世纪 70 年代, Cleve Moler 博士和其同事, 利用业余时间为学生编写 EISPACK 和 LIN-PACK 的接口程序。Cleve Moler 前这个接口程序家名为 Malab, 该名为矩阵 (matrix) 和实验室 (labotatory) 两个英文单词的前三个字母的组合。在以后的数年里, Matlab 在多所大学里作为数学辅助软件使用, 并作为面向大众的免费教作广为微传。

80 年代, Cleve Moler 和 John Little 成立了 Math Works 公司, 正式把 Matlab 推向市场,并继续进行 Matlab 的研究和开发。

美国 MathWorks 公司自 1984 年将 Matlab 推向市场以来,先后发布了多个版本,1993 年发 布 4.0 版 1,996 年发布 5.0 版 1,999 年发布 5.3 版。2001 年发布 6.1 版 (R12)。2002 年发布 6.5 版 (R13)。2004 年发布 7.0 版 (R14)。

在 Matlab 进人市场前,国际上的许多软件包都是查接以 FORTRAN、C 等编程语言开发的。 这种软件的缺点是使用曲字,接口简顺,程序结构不开放以及设有标准的基体,很难适成各学 级的最新发展 因而很难维定,Matlab 的时期,为各国科学家开发专业软件提供了新的基础。

时至今日, 经过 Math Works 公司的不断完善, Matlab 已经发展成为适合多学科、多种工作 平台的功能强大的大型软件。在园外, Matlab 已经经受了多年考验。在胶类等国家的高校, Matlab 已经成为线性代数,自动控制理论、数理统计,数字信号处理。时间序列分析、动态系统 仿真等高级课程的基本数学工具,成为或读学位的本料生,硕士研究生。他于研究生必须掌握 的基础软件。在设计研究单位和工业部门, Matlab 被广泛用于科学研究和解决各种具体问题。 在国内,特别是工程界, Matlab 一定会盛行起来。可以说,无论从事工程方面的哪个学科的相 生工作。郑维州 Matlab 建设制分活的功能。

2. Matlab 语言的特点

一种语言之所以能如此迅速地普及,显示出或促死感的生命力,是由于它有增不同于其他 簡易性。此如同 PORTRAN 和 C 等高级语言使,《招观》广需更直接对计算机硬件资源进 行操作一样,被称为第四代计算机语言的 Matab,利用其丰富的高数资源,使编程人员从繁殖 的程序代码中解放出来。 Matlab 最变出的特点就是简洁。 Matlab 用更直观的,符合人们思维 习惯的代码,代替了 C 和 PORTRAN 语言的冗长代码。 Matlab 始用户审求的是最直观、最简洁 的联系半发系统。 LIT 新疆人包证 下 Matlab

①强大的数值运算功能。在 Matlab 环境中, 有超过 500 种数学, 统计, 科学及工程方面的 函数可供使用, 函数的标示自然, 使得问题和解答像数学式子一般简单明了, 让使用者可将精 力全增越存解解方面, 而非常费在电脑操作上。

②运算符丰富。由于 Matlab 是用 C 语言编写的, Matlab 提供了和 C 语言几乎一样多的运 算符, 浸活使用 Matlab 的运算符将使程序变得极为简短。

③Matlab 既具有结构化的控制语句(如 for 循环, while 循环, break 语句和 if 语句),又有面向对象编奏的条件。

①高级但简单的程序环境。作为一种直译式的程式语言,Madlab 容许使用者在短时间内 写完程序,所花的时间约为用 FORTRAN 或 C 的几分之一,而且不需要编译(compile)及链接 (link) 即能执行。同时包含了更多及更容易使用的内建功能。

⑤先进的资料视觉化功能。Matlab 的物件导向图形架构让使用者可执行视觉数据分类, 并制作高品质的图形、完成科学性或工程性图文并茂的文章。

⑥丰富的程序工具箱。Matlab 的程序工具箱融合了套装前软件的优点,具有灵活开放与容易操作的环境,这些工具箱提供了使用者在特别应用领域所需的许多函数。現有工具箱有,符号运算,利用 Maple V 的计算核心执行).影像处理,统计分析,信号处理,神经网路、模拟分析,控制系统、即时控制、系统确认、强建控制、弧线分析、最佳化、模糊逻辑、mu 分析及合成、化学计量分析。

②开放及可延伸的架构。Matlab容许使用者接触它大多数的数学原始码, 检视运算法, 更 改现在函数, 甚至加入使用着自己的函数使其成为使用者所需要的环境。 ③功能强大的 SIMULINK 仿真环境。SIMULINK 是一个进行动态系统建模、仿真和综合分 析的集成软件包。它可以处理的系统包括:线性、非线性系统,离散,连续及混合系统,单任多。 を任务离散事件系统。在 SIMULINK 提供的图形用户界面(CIII)上,只要进行颤标的简单能过 排作就可构造出复杂的仿真模型。它外表以方块图的形式呈现,且采用分层结构。从建模角 度讲,这既适于自上而下(Top-down)的设计就型(概念、功能、系统、子系统、直至器件),又适于 自下间上(Button-up) 进程设计。从分析研究角度讲,这种 SIMULINK 模型不仅能让用户知道 具体环节的动态细节,而且能让用户清晰地了解各器件、各子系统、各系统间的信息交换、李细 各部分之间的交互影响。

3.2.2 Mathematica 概述

Mathematica 是集數值計算,符号推导、图形处理与程序开发于一身的大型综合性计算机代 原系。它与 Matible 已成为当今世界上最流行的两大主流數学软件。Mathematica 因其强大的 符号律导与二水开发功能而为广大教学、力学、计算机科学及其他宏门学科的学者们所推带。

Mathematica 是美国 Wolfram Research 公司开发的数学软件,它的主要使用者是从事理论 研究的数学工作者 其他科学工作者以及从事实施工作的工程就本人员。Mathematica 可以用 于解决各种领域的涉及复杂的符号计算和数值计算的问题,能够代誉许多以前只能靠纸和笔 解决的工作。这种思维和编辑工具的革新可能对各种研究模域和工程领域产生探远的影响。

Mathematica 可以做许多符号演算工作,如进行多项式的计算、因式分解、展开等;进行各种 有理式计算、求多项式、有理式方程和超越方程的精确解和近似解,进行数值的或一般代数式 的向量、矩阵的各种计算;求极限、导数、积分,等级数层开,求解某些做分方程等。 Mathematica 还可以作任意位数的整数或分子 分母为任意大整数的有理数的精确计算,作具有任意位精度 的数值(实、复数值)的计算。所有 Mathematica 系统内部定义的整高数、实(复)函数也具有这 样的性质。使用 Mathematica 可以很方便地面出用各种方式表示的一元和一元函数的图形。 通过这样的图形、使用者可以立即形象地把握住函数的某些特性,而这些特征一般很难从函数 的符号表达式中看情楚。

Mathematica 的能力不仅仅在于以上描述的这些功能,更重要的在于把这些功能有机地结合在一个系统里。在使用这个系统时,人们可以根据自己的需要,时而从符号演算转为画图形,时而又转为做数值计算。这种灵活性能带来极大的方便,有使一些看起来非常复杂的问题变得很简单, Mathematica 还是一个很容易扩充和修改的系统,它提供了一套描述方法,相当于一个编彩语。,用这个语言可以写题序、概染各种徐桉问题。

1. Mathematica 的启动与读出

Mathematica 作为具有 Windows 界面的高级应用软件,其操作过程与绝大多数的应用系统 是类似的。

- 进入系统的方式有:
- ①打开执行文件(开始→程序→Mathematica 4 或 3);
- ②双击桌面上系统图标。
- 退出系统的方式有:
- ①有接使用工具关闭按钮:
- ②菜单 File→Exit。

系统界面中的菜单栏中有: File, Edit, Cell, Format, Input, Kernel, Windows, Help, 共 8 項。

其中的 Cell、Format 为对用户所写的单元(相对独立的一次输入,即输入界面的右端蓝色 边线限定的小段)进行设置与管理; Impu 中的选项可以对单元的建立与运行设置某些特定的 任务与效果; Kemel 是对系统的核进行设定(不宜轻易改动); File, Edit、Windows, Help 的功能与 常见的软件系统相同。

2. Mathematica 编程部介

下面簡要介绍 Mathematica 中的编程以及与编程相关的一些知识。使用纯函数、模式匹配等编程方法应当成为一种好的习惯。在具体的问题上应优先考虑 Mathematica 提供的高级编程方法。实现计算 n!,可以有各种途径,Mathematica 系统帮助中提供的计算整数阶乘的例子如下。

```
f - Factorial
```

```
f[n]:=n!
```

$$f[n_{-}]:=Gamma[n-1]$$

$$f[n] := nf[n-1] : f[1] = 1$$

$$f[n]$$
; = Product[i , $|i$, n]

$$f[n_{-}]$$
; = Module[$\{t=1\}$, Do[$t=t*i$, $\{i,n\}$];t]

$$f[n] := Module[t=1,i], For[i=1,i< n,i++,t*=i]:t]$$

$$f[n]:=If[n=1,1,nf[n-1]]$$

$$f = [H[#1 = 1, 1, #1 #0[#1 - 1]] &$$

这是在 Malbomatica 中用 12 幹不同方法实现阶乘计算程序的简单例子,充分体现了它的编 器的风格和灵活性。因此使用者应当侧置于学习 Mathematica 高效的编程方法,用它未需决复 杂的实际问题。

第4章 赤潮非线性动力学

亦潮的发生机制至今仍未明了。本章运用非线性动力学**理论研究了单种群**非潮藻类、多 种工作潮藻类以及赤潮食物验的生态动力学行为,阐明了模型的非线性动力学特性,提出了赤 潮发生的生态动力学机制。

4.1 单种群赤潮藻类的非线性动力学

本节以渤海赤欄代表性應奏——中肋骨条簾为研究对象,主要考虑影响簾类生长的理化 因子氮和磷对瘭类生长的影响,同时对各环境因了进行关联和模型合理简化,建立了多自由度 非线性动力学模型。在此基础上,运用现代非线性力学的分岔理论对模型进行理论求解和讨 论。根据分析结果,较为明确地提出了影响赢类生长的限制性因子,并根据文献值对模型进行 行作重。

4.1.1 模型的建立

引发赤襕的生物在世界范围内约有80多个种属,除细菌和原生动物缢虫外,其余均为廉 类。而在我国沿海海域的赤潮生物约90多个种属,不同季节和海域引发赤黑的藻类种属也不 同,其中以甲藻和硅藻后多。以下选取具有代表性的硅廉——中肋骨条藻为例,研究其生长规 徐与营养验之间的关系。

基于有连续培养基的培养室内懷生物的连续培养模式,以及封闭环境中赤潮发生过程的 生态动力学模型,本章对发生中肋骨条集赤潮的主要环境因子囊和磷对生态动力学模型的影响进行了研究,并认为氮和磷两种营养盐对集类生长的聚制是互相独立的,即

$$\mu_{\text{max}} = \mu_{\text{max}, N} \cdot \mu_{\text{max}, P} \qquad (4-1)$$

根据微生物生长的底物消耗抑制动力学模型方程。得到氦和磷限制的营养动力学模型如下,

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= r_1 \left[-(r+l_1)A + \mu_{\min}g(N)g(P)A \right] \\ \frac{dN}{dt} &= r_2 \left[l_2(N_0 - N) - \omega_1 \mu_{\min}g(N)g(p)A + \varepsilon_1 A \right] \\ \frac{dP}{dt} &= r_3 \left[l_3(P_0 - P) - \omega_2 \mu_{\min}g(P)g(N)A + \varepsilon_2 A \right] \end{aligned}$$

$$(4-2)$$

其中, 营养增长函数符合 Monod 方程

$$g(N) = \frac{N}{K_N + N}$$

$$g(P) = \frac{P}{K_N + P}$$
(4-3)

式中:A 代表t 时刻藻类的密度;N、P 分别代表t 时刻可溶性无机氮和可溶性无机磷的浓度;N。N0、P0 代表氮、磷的初始浓度;t1、t2、t5 分别代表藻类、氮和磷的相对增长比率;t1、t1、t5 为藻

类、氨和磷的环境损耗率; 为集类的死亡率; ε, 和 ε, 分别代表灌头代谢分解及其他生物代谢 对氦、磷液度增长的贡献率 (同比浓度下) εα, να, 化表素类生长对氮、磷的吸收比率; μ_{εα} 为藻 步的最大生长课率 ε, ε, ε, 分别代表灌萃性长对氦和磷的性物和常数。

4.1.2 模型的分析与求解

根据模型方程的基本特征,注意到分式展开后出现的关于复和磷的高次非线性项,运用现代非线性动力学理论中的中心流形定理来判断方程解的稳定性。

首先,求方程的平衡点。方程(4-2)可以简化为

$$\frac{dA}{dt} = \alpha_1 A + \beta_1 g(N) g(P) A$$

$$\frac{dN}{dt} = \alpha_1 (N_0 - N) - \beta_2 g(N) g(P) A + \eta_1 A$$

$$\frac{dP}{dt} = \alpha_3 (P_0 - P) - \beta_3 g(N) g(P) A + \eta_2 A$$
(4-4)

其中

$$\alpha_1 = -r_1(r + l_1), \quad \alpha_2 = r_2 l_2, \quad \alpha_3 = r_3 l_3, \quad \beta_1 = r_1 \mu_{\underline{m}}, \quad \beta_2 = r_2 \omega_1 \mu_{\underline{m}},$$
 $\beta_3 = r_3 \omega_2 \mu_{\underline{m}}, \quad \eta_1 = r_2 \varepsilon_1, \quad \eta_2 = r_2 \varepsilon_2$

考相天又獻,选取以下多数

$$r_1 = 13$$
, $r_2 = 2.8$, $r_3 = 0.8$, $l_1 = 0.975$, $l_3 = 0.4$, $l_3 = 0.1$, $r = 0.9$

$$\mu_{max}=3.0$$
, $K_N=4.0$, $K_P=0.54$, $\varepsilon_1=2.1$, $\varepsilon_2=0.28$, $\omega_1=1.2$, $\omega_2=0.20$ 令方稱(4-4)式右維为零、則

①A=0时, 易得平衡点为(0, No. Po), 即初始状态:

② $A \neq 0$ 时,此即为 t 时刻藻类的浓度不为零,令 N/P = k,求出平衡点 $X^* = (A^*, N^*, P^*)$

讲行加下线件 容極。

$$x = A - A^*$$
$$y = N - N^*$$

将上式带人微分方程(4-4),同时将 g(N)、g(P)进行泰勒展开,分离线性项和高次项得

 $\theta' = R\theta + f(\theta)$ (4-5)

其中
$$\theta = (x, y, z)^T$$
, K 为线性項系數矩阵, $f(\theta)$ 为高次項。

$$f(\theta) = (f_1(\theta), f_2(\theta)), f_3(\theta))^T$$

批山

$$\begin{split} f_1(\Phi) &= \frac{-\beta_1 K_0 A^* P^*}{(K_N + N^*)^2 (K_N + P^*)^2} \gamma^2 + \frac{\beta_1 K_0 A^* P^*}{(K_N + N^*)^2 (K_N + P^*)^2 Y} \\ &= \frac{\beta_1 K_0 A^* P^*}{(K_N + N^*) (K_N + P^*)^{32}} + \frac{\beta_1 K_0 K_0 A^* N^*}{(K_N + N^*)^2 (K_N + P^*)^2} \gamma^2 \\ &= \frac{-\beta_1 K_0 A^* N^*}{(K_N + N^*) (K_N + P^*)^2} \gamma^2 + \text{h.o.t.} \end{split}$$

$$\begin{split} f_2(\theta) &= \frac{-\beta_1 K_M \Lambda^*}{(K_H + N^*)^2} y^2 - \frac{\beta_2 K_M}{(K_H + N^*)^2} z^9 - \frac{\beta_2 K_M \Lambda^*}{(K_H + N^*)^4} y^2 + \frac{\beta_2 K_M}{(K_H + N^*)^3} z^9 + \text{h.o.t.} \\ f_3(\theta) &= -\frac{\beta_3 K_M \Lambda^*}{(K_H + N^*)^2} z^2 - \frac{\beta_2 K_M}{(K_H + N^*)^2} z^2 - \frac{\beta_3 K_M \Lambda^*}{(K_H + N^*)^2} z^2 + \frac{\beta_3 K_M \Lambda^*}{(K_H + N^*)^3} z^2 + \text{h.o.t.} \end{split}$$

平衡点外的 Jacobi 矩阵节

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & s_1 & s_2 \\ t_1 & -s_1 - \alpha_2 & -s_2 \\ t_2 & -s_1 & -s_2 - \alpha_2 \end{bmatrix}$$

其中

$$s_1 = \frac{-\alpha_1 \, K_{tr} A^*}{N^* \left(K_{tr} + N^*\right)}, \quad s_2 = \frac{-\alpha_1 \, K_{tr} A^*}{N^* \left(K_{tr} + P^*\right)}, \quad t_1 = \frac{\eta_1 \, \beta_1 + \beta_2 \, \alpha_1}{\beta_1}, \quad t_2 \simeq \frac{\eta_2 \, \beta_1 + \beta_3 \, \alpha_1}{\beta_1}$$

计算 K 的特征信,今|1k-E|=0.解4

$$\lambda_1 = s_2 + \frac{s_1 t_1 \alpha_3}{\alpha_2 t_2}, \quad \lambda_2 = t_1, \quad \lambda_3 = \frac{\alpha_2 t_2}{t_2}$$

易知 $λ_1, λ_1 ≠ 0$, 故令 $λ_1 = 0$ 。其对应的特征向量分别为

$$\boldsymbol{\zeta}_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{t_1}{a_2} & \frac{a_2}{t_2} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\zeta}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{t_2-t_1}{t_1+a_2} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\zeta}_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{t_1^2-a_2\,t_2}{a_2\,t_1-a_2\,t_2} & \frac{t_1\,t_2-a_2\,t_2}{a_3\,t_1-a_2\,t_2} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

由特征向量求取的线件变换

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{t_1}{\alpha_1} & 0 & \frac{t_1^2 - \alpha_2 t_2}{\alpha_2 t_1 - \alpha_2 t_2} \\ \frac{\alpha_3}{t_2} & \frac{t_2 - t_1}{t_1 + \alpha_3} & \frac{t_1 t_2 - \alpha_2 t_2}{\alpha_2 t_1 + \alpha_2 t_2} \end{bmatrix}$$

代人参数得

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3.063 & 0 & 2.767 \\ -0.0697 & -1.154 & 2.632 \end{bmatrix}$$

故

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} -0.3728 & 0.4408 & -0.3230 \\ 0.9601 & -0.3142 & -0.0346 \\ 0.4127 & -0.1266 & 0.3576 \end{bmatrix}$$

作线性变换

$$\phi' = D\phi + T^{-1}f(T\phi)$$

其中

 $\phi' = D\phi + T^{-1}f(T\phi)$ (4-6)

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_2 t_2}{2} \end{bmatrix}, \quad \phi = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

把各参數代人式(4-6)。得

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha_2 t_2}{t_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.372 \ 8f_1 \ (\mathbf{T}\phi) + 0.440 \ 8f_2 \ (\mathbf{T}\phi) - 0.323 \ 0f_3 \ (\mathbf{T}\phi) \\ -0.960 \ 1f_1 \ (\mathbf{T}\phi) - 0.314 \ 2f_2 \ (\mathbf{T}\phi) & 0.034 \ 6f_3 \ (\mathbf{T}\phi) \end{bmatrix}$$

$$0.412 \ 7f_1 \ (\mathbf{T}\phi) - 0.126 \ 6f_2 \ (\mathbf{T}\phi) + 0.357 \ 6f_3 \ (\mathbf{T}\phi) \end{bmatrix}$$

$$(4-7)$$

由中心流形定理,设

$$\begin{cases} v = b_2 u^2 + b_3 u^3 + b_4 u^4 + \cdots \\ w = c_3 u^2 + c_3 u^3 + c_4 u^4 + \cdots \end{cases}$$

格 F 式代人 齐释(4-7), 比较等式两端同次幂的系数后得

$$\begin{array}{lll} b_1 = 0, & b_2 = 0.500 \sigma_1 \alpha_1, & b_4 = 0.125 t_1 \alpha_1 \sigma_2 + 0.416 \ 7 \sigma_1^2 \alpha_1 t_2 / t_1 \\ c_2 = 0.500 \alpha_2, & c_3 = 0.166 \ 7 \sigma_1 \alpha_2 t_2 / t_1 \\ c_4 = 0.251 \times \left[\frac{\sigma_1^2 t_1^2 \alpha_2}{t_1^2} + \frac{\beta_1 \alpha_1 K_P}{(K_+ P^+)^2} - \frac{\alpha_2 \beta_2 (t_1 - t_2) K_P A^+ P^+}{(K_+ P^+)^2} \right] \end{array}$$

* L 1j (Kp+P) (KN+N 八) 糖磁剤三水方的中心液形的展开式为

$$W^{c} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.500\alpha_{2}\alpha_{3}u^{3} + O(u^{4}) \\ -0.500\alpha_{3}u^{2} - \frac{0.1667\alpha_{2}\alpha_{3}t_{2}}{t_{1}}u^{3} + O(u^{4}) \end{pmatrix}$$

代人式(4-7)得中心液形上液的方程

$$u' = -\left[0.243\ 0 \times \left(1 - \frac{\beta_2\,t_1}{\beta_1\,\alpha_2\,t_2} + \frac{1}{\alpha_2}\right)\frac{\beta_1\,A^*\ N^*}{K_N + N^*} + \frac{0.251\ 4\beta_2\,t_1}{\alpha_2\,t_2}\right]\frac{\alpha_2\,K_P t_1}{\left(K_P + P^*\right)^2}u^2 + O\left(u^4\right)^2 \left(\frac{\alpha_2\,K_P t_1}{k_2\,k_2} + \frac{1}{\alpha_2\,k_2}\right)^2 \left(\frac{\alpha_2\,K_P t_1}{k_2\,k_2} + \frac{1}{\alpha_2\,K_P t_1}\right)^2 \left(\frac{\alpha_2\,K_P t_1}{k_2\,k_2} + \frac{1}{\alpha_2\,k_2}\right)^2 \left(\frac{\alpha_2\,K_P t_1}{k_2\,k_2} + \frac{1}$$

令 u^3 的系数为 C,则 C 的符号取决于

$$m = 0.243~01 \times \left(1 - \frac{\beta_2 \, t_1}{\beta_1 \, \alpha_2 \, t_2} + \frac{1}{\alpha_2}\right) \frac{\beta_1 \, A^* \, N^*}{K_N + N^*} + \frac{0.251~4 \beta_2 \, t_1}{\alpha_2 \, t_2}$$

代人各参数,得

$$m = \frac{10.086k^2 - 168.554k - 0.0760}{(1.12k + 0.2390)(30.957k + 0.956)}$$

由分岔理论知,当系统发生分岔时,有 m=0。此时求得

 $k_1 \approx 0, k_2 = 16.71$

4.1.3 结果与讨论

由于 R = N/P, 当 k = 0 时, N = 0, 即表示海水中不含营养盐氮,而这在实际中很难出现, 因此当 k = 0 时无实际意义,下面就 k = 16.71 展开讨论。

①当 k = 16.71 时, P' = 1.382, N' = 23.096, A' = 32.36。海洋學家认为,大洋中的无机 類和磷的比为 $16 \cdot 1$ (Redired 比值)。 般认为,比值过高或过低都会影响需要的生长。另外由 此计算出的引发需类急删繁殖的限制性营养盐磷的浓度与标号等实验研究得出的引发中肋骨条箱的 DP 值应大于 1.2 umol/L 也较为一致。

②当 k > 16.71 时, C < 0, 系统趋于稳定。此时, 磷处于相对缺乏状态, 为限制性环境因 子。因此藻类生长速率较慢, 死亡率和环境损耗率大于生长速率, 藻类浓度减小, 甚至趋于消 È.

③当 1 < k < 16.71 时, C > 0. 系统不稳定。此时, 限制性因子磷相对充足, 使得蒸类繁殖 增快,浓度迅速增加,从而形成一次赤潮。Redfield 等认为,在海洋中,任何氯的缺乏都可以有 来自于浮游牛物的周复作用所弥补、而磷的补充则只受物理因素的影响、恢复相对较慢。因而 盛在很大会以上是海水中臺举生长的限制性营养社。

①当 A, = 0 时, 可以得出 k = 16.2, 即为模型方程的解产生分岔时 k 的取值。这与模型的 最终分析结果基本一致。

为了检验理论结果 超程所洗罐刑条款值在计算机上用 Mailab 拼行了信息。下面给出信息 结果。图 4-1、图 4-2 和图 4-3 是藥类、氮和磷的浓度随时间变化图。

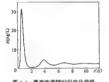




图 4.1 基举浓度随时间变化曲线

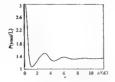
图 4-2 氯脓度随时间变化的曲线

由于环境因常以及事类本身生理特性的限制, 基类的生长表现出新近的周期性。当周围 环境活官时,一定种群密度的藻类开始迅速生长,同时消耗周围环境的营养物质。当藻类的密 度大于一定的值时,形成第一次赤潮。而当寨类密度第一次达到峰值(此时赤潮的影响最为严 量)时, 毫类对周围环境的利用达到极限。随后,由于营养盐限制(由图易知,同时期的复和碘 浓度降低到较低值) 藻类的浓度开始急剧下降,直到很低的水平。由于藻类密度的急剧降低, 藩类代谢和死亡藻类的降解,以及洋流的扩散作用,营养盐的浓度逐渐恢复。藻类在此条件下 又讲人象剧增长期。从而形成第二次赤襕(第二次峰值的出现)。因为营养盐的浓度比第一次 时小,所以嘉类浓度的峰值较第一次小。随后,纂类浓度随时间继续振荡,最后趋于平衡,见图 4-1-

由图 4-2 和图 4-3 可知,营养盐氯和磷的浓度随时间变化亦呈周期变化,经几度提落后趋 于恒定值,而且峰值量衰减趋势。比较图 4-2 和图 4-3 可知,礁的浓度在经过几次周期振荡后 趋于极低的水平,而氮的浓度经过几次周期振荡后趋于初始的水平。这反映了磷在赤潮的发 生过程中是限制性营养盐,其浓度水平直接影响赤潮的发生过程。比较图 4-1、图 4-2、图 4-3 可知,当藻类的浓度最大时,氮和磷的浓度也逐渐降到最低值,但有一定的延迟。

图 4-4、图 4-5 和图 4-6 分别表示出了藻类浓度与氮浓度、藻类浓度与磷浓度以及氮的浓 度和磁的浓度的时间历程图,图中的曲线皆收敛于一点。图 4-6 表征了赤潮发生过程中氮和 磁的浓度变化。由图易知,氦的浓度经过几次周期振荡后能基本恢复到初始水平,而磷的浓度 在几次周期振荡后趋于较低的水平。稳定点处的复磷比值接近于 16:1,仿真结果和实际非常 接近。

本节利用生物生长机理,主要考虑了赤襉发生过程中关键的环境因子氮和磷及其之闻的





15 A(ug/L) 图 4-5 基準波度与确的波度时间历程图

20 25 20

10

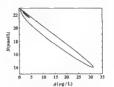


图 4-4 基举法库与复数度时间历程图

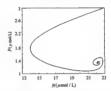


图 4-6 复的浓度与碘的浓度的时间历程图

据今和庇物反馈机制,建立了代表赤潮幕举生长的新的非线性生态动力学模型,并在此基础上 对模别方跟可能的分分行为进行了分析和讨论。分析表明在基举生长过程中营养体对基类起 着重要作用,在忽略其他物理因素的影响下,磷的浓度对藻类的生长影响最大,为限制性因子。 同时,模型的分析结果和有关文献的实验结果基本一致。对模型进行仿真的结果也表明,模拟 结果与未搬的实际发生过程基本一致,理论分析结果与仿真结果是吻合的。

4.2 多种群赤潮藻类的非线性动力学

E.S.N 模型的非线性动力学分析 4 2 1

本节内容依据相关文献资料,通过分析多种群赤潮生态动力学模型,根据种群食物链的营 养物质增加一浮游植物(硅基)大量繁殖一夜光藻的迅速繁殖 发生赤潮的反馈机制,建立反 胁各种生态要害的多参数模型。洗取主要影响参数作为控制变量,对模型方程解的稳定性进 行了探入的研究。

- 多种积水溶血管链膜原

根据夜光寨赤潮发生时形成的营养物质—硅寨—夜光寨这样一个简单的食物链、利用多 种群生态学原理,建立夜光幕债养动力学模型:

$$\frac{dE}{dt} = \kappa_1 (E_0 - E) - \frac{mES}{E_0 + E}$$

$$\frac{dS}{dt} = -(\gamma + c_1)S + \frac{E_0 + E}{E_0 + E} - b(1 - e^{-\beta t})N$$

$$\frac{BN}{LT} = -(\delta + c_1)N + c_2b(1 - e^{-\beta t})N$$
(4-8)

2. 系统模型的稳定性分析

根据模型方程的基本特征,注意到食物链模型中各元素的物理意义及在实际发生过程中 相关的。 用合,考虑用 Lyagunov 运动稳定性的判定条件及其相关稳定理论束判断模型方程的 稳定性。

首先求方程的平衡点,今方程(4-8)的左端为零,即

$$\frac{dE}{dt} = 0$$

$$\frac{dS}{dt} = 0$$

$$\frac{dN}{dt} = 0$$

$$(4-9)$$

解方程(4-9)得模型方程的平衡点 Q(E*,S*,N*)。作坐标平移,令

$$\begin{cases} u = E - E^* \\ v = S - S^* \\ w = N - N^* \end{cases}$$

则方程(4-8)可化为

$$\frac{du}{dt} = \pi_1(E_0 - E^* - u) - \frac{\pi u(u + E^*)(v + S^*)}{E_+ + u + E^*}$$

$$\frac{dv}{dt} = -(Y + c_2)(v + S^*) + \frac{\epsilon_1 a(u + E^*)(v + S^*)}{E_+ + u + E^*} - b(1 - e^{-K_{\bullet \bullet} s^*)})(w + N^*)$$

$$\frac{dw}{dt} = -(\partial + c_2)(w + N^*) + \epsilon_2 b(1 - e^{-K_{\bullet \bullet} s^*})(w + N^*)$$
(4-10)

进而可得模型方程(4-8)的线性部分的 Jacobi 矩阵

$$\begin{split} K = \begin{bmatrix} \kappa_1 + \frac{\kappa S^*}{(E_n + E^*)^2} & \frac{-\kappa E^*}{E_n + E^*} & 0 \\ & \frac{\epsilon_1 a S^*}{(E_n + E^*)^2} & -(\gamma + \epsilon_2) + \frac{\epsilon_1 a E^*}{E_n + E^*} - \beta b N^* e^{-\beta^*} & b \left(1 - e^{-\beta^*}\right) \\ & 0 & \epsilon_2 \beta b N^* e^{-\beta^*} & -(\delta + \epsilon_2) + \epsilon_2 b \left(1 - e^{-\beta^*}\right) . \end{split}$$

根据 Lypunov 运动稳定性条件和有关稳定性理论,模型方程的局部稳定性取决于 Jacobi 矩

降 K 的特征值。对于:维模型方程,其平衡点应当有 8 种情况。对于所讨论的模型方程,考 應到具体实际情况、仅有 3 种情况与限体意义、即 $Q_1(E_0,0,0),Q_2(E_1,S_1,0)$ 和 $Q_3(E^*,S^*,N^*)$,下面讨论在各种验表下基础的减离验证性。

①对于平衡态 $Q_1(E_0,0,0)$,物理意义是理想化的初始水平,即硅藻和夜光藻的种群密度 均为零,此时的 Jacchi 每阵为

$$K = \begin{bmatrix} -\pi c_1 & \frac{-\pi a E_0}{E_n + E_0} & 0 \\ \\ 0 & -(\gamma + c_2) + \frac{\varepsilon_1 a E_0}{E_n + E_0} & 0 \\ \\ 0 & 0 & -(\delta + c_1) \end{bmatrix}$$

Jacobi 矩阵为上三角矩阵,其三个特征值分别为: $-\kappa_1, \phi$ 和 $-(\delta + c_1)$,其中

$$\varphi = -(\gamma + c_2) + \frac{\varepsilon_1 a E_0}{E_- + E_0}$$

②对于平衡态 $Q_2(E_1,S_1,0)$,此时硅藥的细胞密度不为零。令 N=0,则由方程(4-9)可以

解得

$$E_1 = \frac{(\gamma + c_2)E_n}{aE_1 - \gamma - c_2}, S_1 = \frac{c_1(E_0 - E_1)(E_n + E_1)}{aE_1}$$

显而易见,营养盐的函数实际值应当为正,故有

$$a\varepsilon_1 > \gamma + c_2$$

当 $S_1 \leq 0$ 时,方积代表非实际系统,但从理论上讲,此时系统是稳定的。 简 $S_1 > 0$ 为赤潮发生的必要条件,即

$$E_0 > E > E_1$$

其中 E 为兼类实际发生过程浓度。

同时,对于稳定态 $Q_2(\mathcal{E}_1, S_1, 0)$,对其对应的 Jacobi 矩阵的特征值分析表明,其稳定性变 化取决于 θ, θ 由下式给出:

$$\theta = -(\delta + c_3) + \varepsilon_2 b(1 - e^{-\beta c_1})$$

随参数取值的变化,稳定态 Q2 出现跨临界分岔和超临界分岔现象。

解方程(4-9),可得

$$S^* = -\frac{1}{\beta} \ln \left(1 - \frac{\delta + c_3}{\epsilon_2 h} \right)$$

E*取决于二次方程

$$c_1 E^{*2} + [aS^* + c_1(E_n - E_0)]E^* - c_1 E_0 E_n = 0$$
 (4-11)

N°由下式给出:

$$N^* = \frac{\varepsilon_1 c_1 (E_0 - E^*) - (\gamma + c_2) S^*}{b(1 - e^{-\beta^*})}$$

对于 E^* ,解方程可得到两个根, E^*_1 和 E^*_2 ,两个根对应的平衡态为(E^*_1 , S^* , N^*_1)和(E^*_2 , S^* , N^*_1),其中

$$N_i^* = \frac{\epsilon_1 c_1 (E_0 - E_{i_1}^*) - (r + c_2) S^*}{b (1 - e^{-\beta S^*})}$$

对于 i=1,2, 方程(4-11)的两个解一个为正,一个为鱼。若定义 $E_i^*>0$, 则 $E_i^*<0$, 可知 字梅志(E_i^* , S^* , N^*) 法生态学 上是非实际的状态。 对于平衡志(E_i^* , S^* , N^*),其稳定性取 净干部(円度 S^* S^* S^* N^* >0. 由 S^* >0 of S^*

$$\varepsilon, b > \delta + c$$

可以认为, s, b > ô + c, 为赤潮发生和发展的必要条件之一。

 $N^{\circ} > 0$ 的条件是当且仅当 $\omega > 0$.此处

$$\omega = \varepsilon_1 c_1 (E_0 - E_i^*) - (\gamma + c_2) S^*$$

此外、N'和 E'的正概总是唯一的、故在 E'、S'、N' > 0 时,实际系统仅有一个稳定态。 也就是说对于该模型方程,如果在平衡态 $Q_1(E',S'',N'')$,且 E'、S''、N'' > 0 时若出现一个 零卷志、献基本第一金段内县唯一的、月梯型方程不会在该象限内产生变叉分岔、即截点、

分析可知,平衡态 $Q_2(E_1,S_1,0)$ 和平衡态 $Q_3(E^*,S^*,N^*)$ 在临界分岔点出现交叉重量,此时 $\omega=0$ 。在临界点处的局部分岔行为可总结如下。

当 ω <0时,(E_1 , S_1 ,0)稳定,(E^* , S^* , N^*)为生态非实际的(Z^* <0);当 ω >0时,(E_1 , S_1 ,0)不稳定,(E^* , S^* , N^*)为生态实际且稳定的。

嫁上所述,从理论上讲,系统解的稳定性是有条件的,而且在不同的平衡态之间,稳定的条件也不同,不同平衡态之间存在着交叉重叠的现象。对于平衡态 $(N_s,0,0)$,稳定性较为简单明了;而对于 $(N_s,S_t,0)$,虽然理论上存在稳定的可能性,但是实际上是不可能稳定的。在两种能界分位 $\varphi=0$ 和 $\omega=0$ 处,稳定态 (E^*,S^*,N^*) 随着 ω 的减小,逐渐离开第一象限。而 $\theta=0$ 证是两种能界分位时的参数需要满足的条件。

为了对模型方程解的稳定性作进一步的深入讨论,考虑到赤潮发生的实际情况以及影响 食物链模型的关键参数,取硅藻的增长率。作为控制变量(单位 10⁻¹ d⁻¹),对模型方程平衡态 的稳定性应用分次理论进行研究。取参数:

$$c_1 = 6.0 \times 10^{-4}$$
, $c_2 = 1.267 \times 10^{-2}$, $c_3 = 2.243 \times 10^{-2}$, $r = 1.20 \times 10^{-3}$

$$b = 3.64 \times 10^{-2} \text{ d}^{-1}$$
, $\gamma = 1.17 \times 10^{-2} \text{ d}^{-1}$, $\delta = 9.20 \times 10^{-2} \text{ d}^{-1}$, $\epsilon_1 = 1.235 \times 10^{-2}$
 $\epsilon_2 = 2.185 \times 10^{-2}$, $\beta = 1.3 \text{ cell} \cdot \text{L}^{-1}$, $E_n = 0.15 \text{ µg} \cdot \text{L}^{-1}$, $E_0 = 8 \text{ µg} \cdot \text{L}^{-1}$

其中 $c_1, c_2, c_3, r, \epsilon_1, \epsilon_2$ 为无量纲的参数,各个状态变量的初始值取值如下:

$$E(0) = 2 \mu g^* L^{-1}$$
, $S(0) = 0.1 \text{ cell} \cdot L^{-1}$, $N(0) = 0.1 \text{ cell} \cdot L^{-1}$

把各參數代人模型方程,进行數值模拟仿真。

对三种平衡态下 E、S 和 N 随着 a 的变化(图 4-7)的分析可知:图 4-7(a)中营养物质浓度 E > 0, 须满足 a > 1.974, 而这也正是赤潮发生的必要条件之 -、即 a; \rightarrow γ + c; \rightarrow a = 2.01 时,系统的稳定性发生变化,此时也正是 φ = 0 时 a 的取值; \rightarrow α 逐漸增大到 2.08 时,系统的

稳定状态发生变化,此时 《播足》=0。具体稳定状态变化曲线见图 4-7。

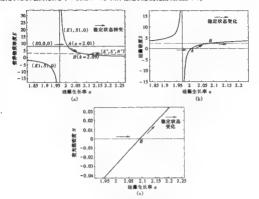


图 4-7 E、S、N 随 a 变化过程 (a)a—E 变化过程;(b)a—S 变化过程;(c)a—N 变化过程

当 α 变化时,(E_0 ,0,0)、(E_1 , E_1 ,0)、(E^* , E^* , E^* , E^* , E^*) 三种平衡状态的稳定性变化出现了交 飞传楼现象。在 A, E, 两点发生了跨線临界分叉,分别对应于 A = 2.01 和 A = 2.09。

进一步的分析表明,当 a 继续增大时(其他参数固定不变),系统的稳定性发生了突然变化。图 4-8 利图 4-9 给出了 a = 2.5 和 a = 3.0 时的系统时间历程图。

图 48 表明系统在 α = 2.5 时, 经过一个数据的时间, 趋于一个平衡点, 图 4.9 表明系统在 α = 3.0 时经过较长时间后, 趋于一个极限环。根据 Hopf 分岔理论, 可以断定在 2.5 ~ 3.0 的区间内, 存在一个 Hopf 分岔点。

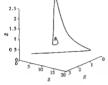


图 4-8 a=2.5 时系统 时间历程

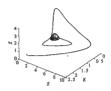


图 4-9 a=3.0 时系统 时间历器

4.2.2 E-S-Z 模型的非线性动力学分析

一般认为,海洋富营养化是造成赤棚暴发的基本条件。而赤潮寨类之间的作用对于阐明赤棚发生机理也有 感要意义。本节选取了典型赤棚寨类——硅藤和甲寨。在 塘洋富营养化的条件下考虑两种寨类之间的相互作用及 择游动物的抽食,接立棵颈如下;

$$\frac{dP_1}{dt} = P_1(\epsilon_1 - a_{11}P_1 - a_{12}P_2 - a_{13}Z)$$

$$\frac{dP_2}{dt} = P_2(\epsilon_1 - a_{11}P_1 - a_{22}P_2 - a_{23}Z)$$

$$\frac{dP_2}{dt} = P_2(\epsilon_2 - a_{21}P_1 - a_{22}P_2 - a_{23}Z)$$

$$\frac{dZ}{dz} = Z(-\epsilon_1 + a_{21}P_1 + a_{22}P_2)$$
(4-12)



变化历程

式中, P_1 、 C_1 分别代表硅藥、甲藥及浮酵动物的密度; ϵ 、(i=1,2)代表兩种藥类的内棄增长率 ϵ_1 代表序等动物的死亡率; ϵ_2 (i=1,2)表示藥类密度制约系數; ϵ_1 及 ϵ_2 及 ϵ_3 分别表示两种藥 发之间的相互作用系數、二者之和($\epsilon_1+\epsilon_2$)表示藥类间的作用率; ϵ_3 、 ϵ_3 、 ϵ_4 、 ϵ_3 数动物与海类之间的储金长系。

参考 Azar 等人的实验数据,所采用的参数表示如下:

 $e_i = a_{ii} = 1$, $a_{23} = \mu$, $a_{22} = d\mu$, $a_{13} = r$, $a_{21} = dr$, $a_{12} = \alpha$, $a_{21} = \beta$

其中 r 为浮游动物对 P, 的最大補食率; d 为浮游动物的捕食转化率且 0 < d < 1。

1. 稳定性分析

模型(4-12)有7个平衡点。

①三种群平衡点 $S_3 = (P_1^*, P_2^*, Z^*)$ 只有一个: $P_1^* = (r - dru - ou + du^2)/|A|$

 $P_2^* = (dr^2 - dr\mu - r\beta + \mu)/|A|$

 $P_2 = (dr^2 - dr\mu - \eta\beta + \mu)/|A|$

 $Z^* = (a\beta + d\mu - d\mu\beta - dr + dr\alpha - 1)/|A|$

系统(4-12)的系数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & r \\ \beta & 1 & \mu \\ -dr & -d\mu & 0 \end{bmatrix}$$

$$1 A 1 = d[r^2 * \mu^2 - (a * \beta) \gamma \mu]$$
②两种群平衡点 3 ↑:
$$S_{00} = (r, 0, dr - 1)/dr^2$$

$$S_{01} = (0, \mu, d\mu - 1)/d\mu^2$$

$$S_{00} = (1 - \alpha, 1 - \beta, 0)/(1 - a\beta)$$
①一种群平衡点 3 ↑:

 $S_{mn} = (1,0,0)$, $S_{mn} = (0,1,0)$, $S_{mn} = (0,0,0)$

均县不稳定的平衡占。

下面着重研究有实际意义的三种群平衡点 S_3 的稳定性及其分岔与混沌。为此,需先求出其相应的推动方恶。今

格式(4-13)带入式(4-12),则得扰动方程

$$\dot{X} = AX + B \tag{4-14}$$

其中

矩阵 A 的特征值决定 「S₃ 的稳定性。其特征方程为

$$\lambda^{3} + a_{1}\lambda^{2} + a_{2}\lambda + a_{3} = 0 \tag{4-15}$$

其中

$$a_1 = d(r^2 P_1^* + \mu^2 P_2^*) Z^* + (1 - a\beta) P_1^* P_2^*$$

 $a_3 = (dr^2 + d\mu^2 - dra\mu - dr\beta\mu) P_1^* P_2^* Z^*$
 $a_4 = (dr^2 + d\mu^2 - dra\mu - dr\beta\mu) P_2^* P_2^* Z^*$

由霍尔维茨判据,特征方程的根具有负实部的充要条件为 $a_i > 0$ (i = 1, 2, 3)且 $a_1 a_2 - a_3 > 0$ 。 此时 S, 是新近稳定的。

当参数取值满足

 $a_1 = P_1^* + P_2^*$

$$a_1 a_2 - a_3 = 0$$
 (4-16)

时,系统将发生 Hopf 分岔。此时,特征方程(4-15)的两个共轭复数根的实部为零,即有一对纯 機根,特征方容的根为

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$$
, $\lambda_3 = -a_1$

其中 ω₀ = a₂。

下面对矩阵 A 施以变换 P, 使其有形式

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & \omega_0 & 0 \\ \omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_1 \end{bmatrix}$$

其中矩阵 P 由矩阵 A : 个特征值所对应的特征向量组成。

$$P = \begin{bmatrix} (r-1)P_1^*P_2^* & -\omega_0P_1^* & rP_1^*(P_2^* - a_1) - P_1^*P_2^* \\ (1-1.5r)P_1^*P_2^* & -\omega_0rP_2^* & P_1^*(P_1^* - a_1) - 1.5rP_1^*P_2^* \\ 0.5P_1^*P_2^* + \omega_0^2 & \omega_0(P_1^* + P_2^*) & 1.5P_1^*P_2^* - (P_1^* - a_1)(P_2^* - a_1) \end{bmatrix}$$

为了得到方程的正规型、做变换 X = PY、其中

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

通过复杂的线件代数运算得到

$$Y = \overline{KY} + D$$
 (4-17)

其中

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{P}^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{P}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}^{1}(\gamma_{1}, \gamma_{2}, \gamma_{3}) \\ \boldsymbol{D}^{2}(\gamma_{1}, \gamma_{2}, \gamma_{3}) \\ \boldsymbol{D}^{3}(\gamma_{1}, \gamma_{2}, \gamma_{3}) \end{bmatrix}$$

 $D^{1}(y_{1}, y_{2}, y_{3}), D^{2}(y_{1}, y_{2}, y_{3}), D^{3}(y_{1}, y_{2}, y_{3})$ 均为非常复杂的代数表达式。

式(4·17)右边第一项为线性项,第二项为非线性项,从这些非线性项中,可以计算出发生 Hoof 分欣后周期轨道的稳定系数 R。

$$\begin{split} R_{*} &= \frac{1}{\log_{\omega}} \left[\left(\frac{\partial^{3} D^{3}}{\partial \gamma_{1}^{2}} + \frac{\partial^{3} D^{3}}{\partial \gamma_{2}^{2}} \right) \frac{\partial^{3} D^{3}}{\partial \gamma_{1}^{2}} - \left(\frac{\partial^{2} D^{2}}{\partial \gamma_{1}^{2}} + \frac{\partial^{3} D^{3}}{\partial \gamma_{1}^{2}} \right) \frac{\partial^{3} D^{3}}{\partial \gamma_{1}^{2}} + \frac{\partial^{3} D^{3}}{\partial \gamma_{1}^{2}} \frac{\partial^{3} D^{3}}{\partial \gamma_{1}^{2}} + \frac{\partial^{3} D^{3}}{\partial \gamma_{1}^{2}} \frac{\partial^{3} D^{3}}{\partial \gamma_{1}^{2}} + \frac{\partial^{3} D^{3}}{\partial \gamma_{1}^{2}} + \frac{\partial^{3} D^{3}}{\partial \gamma_{1}^{2}} \frac{\partial^{3} D^{3}}{\partial \gamma_{1}^{2}} + \frac{\partial^{3} D^{3}}{\partial \gamma_{1}^{2}} \right] + \\ & \frac{1}{16a_{1} \left(a_{1}^{2} + 4a_{0}^{2} \right) \frac{\partial^{3} D^{3}}{\partial \gamma_{1}^{2}} \left(3a_{1}^{2} + 8a_{0}^{2} \right) \frac{\partial^{3} D^{3}}{\partial \gamma_{1}^{2}} + \left(a_{1}^{2} + 8a_{0}^{2} \right) \frac{\partial^{3} D^{3}}{\partial \gamma_{1}^{2}} - 4a_{0} a_{1} \frac{\partial^{3} D^{3}}{\partial \gamma_{1}^{2}} - 4a_{0} a_{2} \frac{\partial^{3} D^{3}}{\partial \gamma_{1}^{2}} \right) \\ & \frac{1}{16a_{1} \left(a_{1}^{2} + 4a_{0}^{2} \right) \frac{\partial^{3} D^{3}}{\partial \gamma_{1}^{2}} \left(a_{1}^{2} + 8a_{0}^{2} \right) \frac{\partial^{3} D^{3}}{\partial \gamma_{1}^{2}} + 3a_{1}^{2} + 8a_{0}^{2} \right) \frac{\partial^{3} D^{3}}{\partial \gamma_{1}^{2}} + 4a_{0} a_{1} \frac{\partial^{3} D^{3}}{\partial \gamma_{1}^{2}} + 4a_{0} a_{2} \frac{\partial^{3} D^{3}}{\partial \gamma_{1}^{2}} \right) \\ & \frac{1}{16a_{1} \left(a_{1}^{2} + 4a_{0}^{2} \right) \left(\frac{\partial^{3} D^{3}}{\partial \gamma_{1}^{2}} + \frac{\partial^{3} D^{3}}{\partial \gamma_{1}^{2}} \right) \left[2a_{0} a_{1} \frac{\partial^{3} D^{3}}{\partial \gamma_{1}^{2}} - 2a_{0} a_{1} \frac{\partial^{3} D^{3}}{\partial \gamma_{1}^{2}} + 2a_{1}^{2} \frac{\partial^{3} D^{3}}{\partial \gamma_{1}^{2}} \right] \right] \\ & \frac{1}{16a_{1} \left(a_{1}^{2} + 4a_{0}^{2} \right) \left(\frac{\partial^{3} D^{3}}{\partial \gamma_{1}^{2}} + \frac{\partial^{3} D^{3}}{\partial \gamma_{1}^{2}} + \frac{\partial^{3} D^{3}}{\partial \gamma_{1}^{2}} \right) \left[2a_{0} a_{1} \frac{\partial^{3} D^{3}}{\partial \gamma_{1}^{2}} - 2a_{0} a_{1} \frac{\partial^{3} D^{3}}{\partial \gamma_{1}^{2}} + 2a_{1}^{2} \frac{\partial^{3} D^{3}}{\partial \gamma_{1}^{2}} \right] \right] \\ & \frac{1}{16a_{1} \left(a_{1}^{2} + 4a_{0}^{2} \right) \left(\frac{\partial^{3} D^{3}}{\partial \gamma_{1}^{2}} + \frac{\partial^{3} D^{3}}{\partial \gamma_{1}^{2}} \right) \left[2a_{0} a_{1} \frac{\partial^{3} D^{3}}{\partial \gamma_{1}^{2}} - 2a_{0} a_{1} \frac{\partial^{3} D^{3}}{\partial \gamma_{1}^{2}} + 2a_{1}^{2} \frac{\partial^{3} D^{3}}{\partial \gamma_{1}^{2}} \right] \right] \\ & \frac{1}{16a_{1} \left(a_{1}^{2} + 4a_{0}^{2} \right) \left(\frac{\partial^{3} D^{3}}{\partial \gamma_{1}^{2}} + \frac{\partial^{3} D^{3}}{\partial \gamma_{1}^{2}} \right) \left[a_{1}^{2} - a_{1}^{2} a_{1}^{2} \frac{\partial^{3} D^{3}}{\partial \gamma_{1}^{2}} \right] \\ & \frac{1}{16a_{1} \left(a_{1}^{2} + 4a_{0}^{2} \right) \left(\frac{\partial^{3} D^{3}}{\partial \gamma_{1}^{2}} + \frac{\partial^{3} D^{3}}{\partial \gamma_$$

稳定系数 R_c 的符号决定了周期轨道的稳定性。 $R_c<0$ 周期轨道稳定, $R_c>0$ 周期轨道不稳定。

2. 实例计算

各参数取值如下:

$$d=0.5$$
, $\alpha=1$, $\beta=1.5$, $\mu=1$, $\epsilon_i=\alpha_i=1$

初始信为

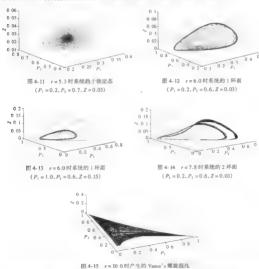
$$P_1 = 0.2, \quad P_2 = 0.6, \quad Z = 0.03$$

将 r 作为控制分岔参数,由式(4-16)可以算出 r=5 486,记为 r_{rc} 此时,可求出 $R_c<0$,从而可以判定所产生的联股环是稳定的。

然后通过进 , 地的计算发现, 当分价参数仓化时, 系统绘过不动点的 0 不面 严 和极限环 的 1 环面 T, 接着产生 [2 环面 T] 由理论和实验证实: T " 在读过路是通有的, 由此可以 看出, 分聚(4-12)所描述的生态系统, 会产生稳定的极限环, 并通过准周期分岔导致提定,

3. 数值模拟

各参数取值同上,仍将 r 作为分岔参数 采用 4 阶 Runge-kutta 方法,分别计算当 r = 5.3、 6.0.7.8、10.0 时,其仿真结果如图 4 11、图 4-12、图 4-13、图 4-14、图 4-15 所示。



(P,=0.2, P,=0.6, Z=0.03)

A以上的理论计算以及数值仿真可以看出、当,增大时、系统状态会发生质的变化, 从稳

定态到极限环题后发生混准。精确的整值计算可以得出,当产5.48时,系统会发生 Hopf 分 念。对于极限环稳定性的判断,由稳定系数 R, < 0 知,周期解库该稳定。现取不同的初始值作 数值计算,结果参看图 4-12 与图 4-13。很明显可以看出,不同的初始值(位于被限环外的初始 点与位于极限环内的助始点/均趋向于极限环,所以在适当的参数范围内,系统只存在一个稳 定的 I 环面极限环。当,继续增大时,系统会产生 2 环面 7°,继续增大,系统出现了 Vance's 螺旋視池。由 7°一根纯道路是通有的,判定该模型所铺还的生态系统通过准周期分岔产生报 加

4. 直導助物補含度的影响

首先考虑高等动物捕食转化率取固定值时模型的非线性动力学行为。各参数取值如下:

$$d = 0.5$$
, $a = 1$, $\beta = 1.5$, $\mu = 1$, $\epsilon_i = a_i = 1$

初始值为: $P_1 = 0.2$ cell·l⁻¹, $P_2 = 0.6$ cell·l⁻¹, Z = 0.03 cell·l⁻¹, 将 r 作为分岔控制参数。此时,将各参数值代人式(4-16),计算得到分岔参数 $r \approx 5.5$ 。

经过仿真计算发现,当分岔参数变化时,系统起过不动点的 0 环面 旷 和极限环的 1 环面 报券产生了 2 环面 旷。理论和实验证实: 严一根地道路是通有的。由此可以看出,方程 (4.12)所指述的生态系统。会产生稳定的缓聚环、并通过准隔期分益导致混准。

固定 r = 5.3, 将 d 作为分岔参数,其他参数取值固定。系统仍然会出现经过不动点的 0 环面 T^{*} 和极限环的 1 环面 T^{*},接着产生了 2 环面 T^{*},然后产生混沌,如图 4-16 所示。

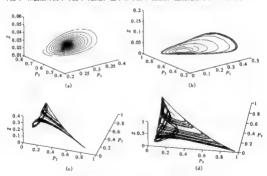


图 4-16 高等动物据食率变化时模型的非线性动力学行为 (a)d=0.5时,果就趋于稳定态;(b)d=0.6时,系统产生的1环圈 (c)d=0 75时,系统产生的2环面;(d)d=0.8时,系统出规器纯状态

从以上的计算以及数值仿真可以看出,当某些影响因子变化时,燕类的生态动力学模型会产生非常复杂的动力学行为,浮鹳动物对 P, 的最大潮食率,增大时,系统状态会发生质的 变化,从稳定态到被限环最后发生阻陷。取不同的初始值,作数值计算。可以看出。在运当的 参数范围内,系统只存在一个稳定的 1 环面接限环。当,继续增大时,系统会产生 2 环面 T°,继续增大 r,系统出现了 Vance。"懒ໝ崖相"。由 T° 程地道路是通有的,判定该模型所描述的生态系统通过准周期分位产生混沌。在此基础上,本节探讨了另外一个重要的因子缩食转化。4 次現即使,值不发生变化、系统此时处了 0 环面),当 d 变化时,系统依然出现了复杂的动力学行为,即从稳定态到稳定的极限环以至最后产生混沌,从而可以判定高等动物的捕食转化率 d 以及浮游动物的最大捕食率、对藤类的非线性动力学行为均有增重要的影响,是在构体基本的由力专能即时需要看上表面的因复

赤灣藥类非級性动力率機型可以用来研究特定海峡藥类的对公分布。变化規律,并定量确定各种物理、化学、生物等因累对亦衡形成的影响。对解决序游植物异常增加导致的赤潮环境。问题有重要的指导意义。本节运用现代非线性动力学理论对赤潮藥类非线性动力学模型的分 岔及稳定性进行了分析。直点研究了浮游动物对藻类的捕食这一重要因素对藻类非线性动力学行为的影响。得到了发生 Hopf 分岔时的参数值,判断了极限环的稳定性,并发现了该模型通过准周期分岔产生混沌。这些研究结果对于理解藻类种群的复杂动力学行为有很好的借鉴意义,并水配于建立有效的赤潮预测模型。

4.3 赤潮食物链的非线性动力学

4.3.1 N-P-Z 模型的非线性动力学分析

根据中助青条藥亦潮发生时形成的营养物质—中助青条藥—押薪动物形成的—个简单的 核验。利用生态学原理、专此尤照强度的影响,建立渤海湾典型亦溯藥类中助骨条藥的生态 动力学模型。

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{N}{e + Nb + cP} + k(N_0 - N)$$

$$\frac{dP}{dt} = \epsilon_1 \frac{N}{e + Nb + cP} P - \lambda(1 - e^{-a^2}) Z - (s + k) P$$

$$\frac{dZ}{dt} = \epsilon_2 \lambda(1 - e^{-a^2}) Z - dZ^4$$
(4-18)

式中, N(:)代表哲养物质(包括囊、磷等营养元素)的浓度总合随时间的变化: P(:)代案中助骨 条纂密度随时间的变化: Z(:)代表押龄动物密度随时间的变化: 其他各参数意义及其取值范 閏如表 4.1 所示。

符号	意义	默认取值	歌值范围 ·								
4	赤嶲藻的生长率	0.2 m ⁻¹ d ⁻¹	0.1 - 0 6								
b	光在水中的衰变率	0.2 m ⁻¹	0.04 ~ 0.2								
c	赤潮寨的自屏蔽作用	0.4 m ² (gC) 1	0.3~12								

表 4-1 参数重义及其取值范围

			1.5
符号	意义	默认取值	取值范围
d	高等动物的蜡食	1 m³ (gC) 1	0.25 ~ 1.0
	吸收营养盐的半饱和常敷	0.03 gCm ⁻³	0.02 ~ 0.15
k	通过跃层的交换率	0.05 d ⁻¹	0.000 8 ~ 0.13
	赤衛藻的祝降率	0.04 d ⁻¹	0.032 ~ 0.08
l l	浮游动物的最大振食率	0.6 d-1	0.6-1.4
a	浮游动物摄食半饱和系数	0.035 gCm ⁻³	0.02 - 0.1
N_0	定量输入的营养物质浓度	0.6	0.1~2.0
€1	赤柳寨的营养转化率	0.9	0.2 - 0 99
€2	浮游动物的营养转化率	0.9	0.2~0 99

考虑浮游动物对赛类的消耗时,采用了 Holling IF 型 Watt 功能性反应方程 (陈兰荪、1988)。 考虑光照对藻类生长的影响时,采用了 Steele 公式 (Edwards etc. 1999)。

考虑营养物质对基本的生长影响时,采用了米门公式(S.E. lorgensen)。

桐裾繣刑方理的基本特征 注音到食物链撒剂中各元素的物理者♡及在实际发生过程中 相互影响、耦合、运用 Lyapunov 运动稳定性理论来判断变量各状态的稳定性。

首先求方程的平衡点、今方程(4-18)的右端为零、即

$$\frac{dN}{dt} = 0$$

$$\frac{dP}{dt} = 0$$

$$\frac{dZ}{dt} = 0$$
(4-19)

解方程(4-19)得模型方程的平衡点 $Q(N^*,P^*,Z^*)$ 。令 $\begin{cases} u=N-N^* \\ v=P-P^* \\ , \# \end{cases}$

$$\frac{du}{dt} = f_1(u, v, w)$$

$$\frac{dv}{dt} = f_2(u, v, w)$$

$$\frac{dw}{dt} = f_3(u, v, w)$$

$$(4-20)$$

可得模型方程(4-18)的线性部分的 Jacobi 矩阵

下面分别考虑 3 种定常状态的稳定性。

①对于(No.0.0),其物理意义对应于初始水平。藻类和浮游动物密度均为零、此时的 Jacobi矩阵

由稳定性理论 完全维多的稳定性股冲于所对应的 Jacobi 拓胜的特征值。对应于(No.0. がは、一体をはいる。
 がいる。
 がいる

$$\Phi = -(s + k) + \frac{\epsilon_1 a N_0}{h(s + N_0)}$$

由于对应矩阵的特征值有一个为零,所以要利用中心流形定理对原方程进行降维处理。 经过分析得到: 当 $\phi = -(s+k) + \frac{\varepsilon_1 \alpha N_0}{\delta(s+N_0)} < 0$ 时, 此状态是稳定的; 当 $\phi = -(s+k) +$ $\frac{\epsilon_1 a N_0}{b(n+N_0)} > 0$ 时, 此状态是不稳定的; 当 $\Phi = -(s+k) + \frac{\epsilon_1 a N_0}{b(n+N_0)} = 0$ 时, 此状态对应的矩阵 有两个为零的特征值,此时将会发生余维 2 的跨临界分岔。而对于所给定的所有参数在其变 化范围内,总有 $\phi>0$,也就是说,定常状态(N_a ,0.0)总是不稳定的,任何一个微小的推动都会 让它偏离(N.,0,0)这个平衡位置。所以在实际的海域中,此种状态不可能稳定地存在。

②对干(N*,P*,0),有两种情况,即(N*,P*,0)和(N*,P*,0)。其中 N*、N* 由方程 $cla. N^2 + [s, a - b(s + k) + cla. (s - N_0)]N - [b(s + k) + cla. N_0]e = 0$

求得: P: 、P: 由方程

$$P_{i}^{*} = \frac{b \pi_{1} (N_{0} - N_{i}^{*})}{s + k}$$
 (i = 1,2)

求得。

因为

$$N_1^* N_2^* = -\frac{[b(s+k) + cke_1 N_0]e}{cke_1} < 0$$

所以两根必导号、设 $N_*^*>0$ 、 $N_*^*<0$ 。对于 N_*^* 无实际意义,因此只考虑 N_*^* 。对应于(N_*^*) P.* .0)的 Jacobi 矩阵

考虑其篇 3 行、矩阵必有一特征值为 e, λ(1-e ****))且定大于零、所以此状态不稳定。

③对于第3种定常状态(N*,P*,Z*),也就是食物链中的3种主体都存在的情况,也是 赤潮发生的基础条件。此时,其 Jacobi 矩阵

$$K = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha dP^+}{\left(\varepsilon + N^+\right)^2 \left(\delta + cP^+\right)^-} - k & -\frac{adN^+}{\left(\varepsilon + N^+\right)^2 \left(\delta + cP^+\right)^2} & 0 \\ \frac{\varepsilon_1 adP^+}{\left(\varepsilon + N^+\right)^2 \left(\delta + cP^+\right)} & -\left(\varepsilon + k\right) + \frac{\varepsilon_1 adN^+}{\left(\varepsilon + N^+\right) \left(\delta + cP^+\right)^2} - akZ^+ e^{-aP^+} & -k(1 - e^{-aP^+}) \\ 0 & \varepsilon_2 akZ^+ e^{-aP^-} & -2kZ^+ + \varepsilon_2 k(1 - e^{-aP^+}) \end{bmatrix}$$

其中 $2^*=\frac{e_2\lambda(1-mP^*)}{d}$ 。代人式(4-19)中的第一式和第二式,可求得关于 N^* 、 P^* 的两个高次方程,但是无法解出具体的表达式。因此下面借助于数值的方法对其稳定性和分岔情况,排行程过

利用现代非线性分岔与混沌理论可以较好地解决复杂情况下系统状态出现的失稳及突变 預象, 这与赤潮的产生密切相关。

各参数采用表 4-1 中的默认值,可以算出初始条件(N, P, Z) = (0.4.0.1.0.05)。

选取多数初始浓度 N_0 作为分岔多数对系统进行研究,分别让 N_0 取不同的值进行分析。 当 N_0 = 0.8 时,系统经过轻微的振荡过程趋于稳定;当 N_0 = 2.0 时,系统发生剧烈振荡并且特 久进行。

由 Hopf 分岔理论可知,当 № 在这个区间变化时,导致系统发生了 Hopf 分岔,系统从趋于 一个稳定保存化为趋于一个极限环。

当 N_0 继续变大时,系统将会出现更加复杂的情况以至于混沌的产生,此时, N_0 = 6.0, 其他参数取默认值。

导致摆拖产生的途径很多,可以通过信期期分危,切分会以及有名的周期,意味着分仓。 本系就提施行为的产生途径还有待研究,这对于了解赤那产生以至于最后控制,亲潮都很有意 义。至于赤獭的产生是因为分岔导致还是提纯的行为,至今尚无定论,有待于进一步研究。

4.3.2 N-P-Z-D 模型的非线性动力学分析

考證海水中有弊盐破壞、浮辦稿物需麼、浮辦或物需度以及碎屑敬度等 4 种物质被度(密度),根据赤潮发生时,种物质浓度(密度)的相互作用关系并利用生态学原理,應立如下综合 生态动力学模型。

$$\begin{split} \frac{dx}{dt} &= -\frac{asy}{(\pi + x)(b + cy)} + \frac{\lambda(by^2)}{(\mu^2 + y^2)} + k(N_0 - x) + dyz^2 + wb \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{asy}{(\pi + x)(b + cy)} - \frac{\lambda(y^2 + y^2)}{(\mu^2 + y^2)} - ry - (z + k)y \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{aby^2}{(\mu^2 + y^2)} - dz^2 \\ \frac{dw}{dt} &= (1 - \alpha - \beta) - \frac{\lambda y^2 x}{(x^2 + y^2)} + ry - (k + b + \Psi)w \end{split}$$

$$(4-21)$$

式中。代表響準物质(包括氮、編等再非产工業)的液度总和;y(z)代表浮游植物密度(各类可导致赤潮发生的藻类密度之和);z(z)代表浮游动物密度;w(z)代表海水中有机物和无机物像小的碎屑浓度;其依各参数象义及其取值在服参见表 4.2。

表 4-2 参數數义及取值范围

符号	意义	默认取值	攻值范围
a	浮游植物的最大生长率	0.2 m ¹ d ¹	0.07 ~ 0.28
ь	海水梢光系數	0.2 m ⁻¹	0.04~0,2
e	浮游植物自進系数	0.4 m ² (g C) ⁻¹	0.3~1.2
ď	高等动物的捕食	1.0 m ² (g C) -1	0.25 - 2.0
	营养元吸收的半饱和系数	0.03 g C m ⁻³	0.02~0.15
h	機断层的交換率	0.05 d ⁻¹	0.008 - 0.13
r	浮游植物的呼吸率	0.15 d ⁻¹	0.05~0.15
	浮游植物的沉降率	0.04 d ⁻¹	0.032 ~ 0.08
No.	混合层以下的营养元胺度	0.6 g C m ⁻³	0.1~2.0
æ	浮游动物的生长率	0.25	0.2~0.5
β	浮游动物的排泄	0.33	0.33~0.6
γ	浮醉动物排泄部分的再生	0.5	0.5~0.9
λ	浮游动物的最大捕食率	0.6 d ⁻¹	0.6~0.1.4
μ	浮游功物被食的半饱和系数	0.035 g C m ⁻³	0.02 ~ 0.1
#	碎屑矿化率	0.1 d ⁻⁷	0.004 - 0.2
¥	碎屑沉降率	0.08 d ⁻¹	8.0 ~ 80.0

为了方便讨论,将系统简记为

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= f_1(x, y, z, w) \\
\dot{y} &= f_2(x, y, z, w) \\
\dot{z} &= f_3(x, y, z, w) \\
&= f_3(x, y, z, w)
\end{aligned}$$
(4-22)

考虑浮游动物对藻类的消耗、光照对藻类生长的影响、营养物质对藻类的生长影响等因 常、采用 A. M. Edwards 给出的较为综合的模型。

根据模型方程的基本特征,注意到食物链模型中各元素的物理意义及在实际发生过程中相互影响、耦合,运用 Lyapunov 运动稳定性理论来判断变量各状态的稳定性。

首先求方程的平衡点,令方程(4-22)的左端为零,即

$$\frac{dx}{dt} = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\frac{dz}{dt} = 0$$

$$\frac{dz}{dt} = 0$$

$$\frac{dz}{dt} = 0$$

$$(4-23)$$

解方程(4-23)得模型方程的平衡点 P(z*,y*,z*,w*),坐标平移,令

$$x_1 = x - x^*$$

$$y_1 = y - y^*$$

$$z_1 = z - z^*$$

$$w_1 = w - w^*$$

并得到如下扰动方程:

$$\frac{d\mathbf{x}_{1}}{dt} = \mathbf{g}_{1}(\mathbf{x}_{1}, \mathbf{y}_{1}, \mathbf{x}_{1}, \mathbf{w}_{1})$$

$$\frac{d\mathbf{y}_{1}}{dt} = \mathbf{g}_{2}(\mathbf{x}_{1}, \mathbf{y}_{1}, \mathbf{z}_{1}, \mathbf{w}_{1})$$

$$\frac{d\mathbf{z}_{1}}{dt} = \mathbf{g}_{3}(\mathbf{x}_{1}, \mathbf{y}_{1}, \mathbf{z}_{1}, \mathbf{w}_{1})$$

$$\frac{d\mathbf{w}_{1}}{dt} = \mathbf{g}_{4}(\mathbf{x}_{1}, \mathbf{y}_{1}, \mathbf{z}_{1}, \mathbf{w}_{1})$$

$$(4-24)$$

可得系统式(4-23)的 Tacobi 铂路

$$J = \begin{bmatrix} \frac{-\alpha\eta^{+}}{(\epsilon+x^{+})^{2}(b+q^{+})} - k & \frac{-\alpha b\pi^{+}}{(\epsilon+x^{+})(b+q^{+})^{2}} + \frac{2\beta\mu^{2}\gamma^{2}\gamma^{2}}{(\epsilon+x^{+})^{2}(b+q^{+})^{2}} & \frac{\beta\gamma^{-2}}{(\epsilon^{2}\gamma^{-2})^{2}} + \frac{\beta\gamma^{-2}}{\mu^{2}\gamma^{-2}\gamma^{-2}} + \frac{\rho\gamma^{-2}}{\mu^{2}\gamma^{-2}\gamma^{-2}} & 0 \\ 0 & \frac{2\alpha\mu^{2}\gamma^{-2}\gamma^{-2}}{(\mu^{2}\gamma^{-2})^{2}} + k^{-r} - s & \frac{-\lambda\gamma^{-2}}{\mu^{2}\gamma^{-2}} & 0 \\ 0 & \frac{2\alpha\mu^{2}\gamma^{-2}\gamma^{-2}}{(\mu^{2}\gamma^{-2})^{2}} & \frac{\alpha\beta\gamma^{-2}}{\mu^{2}\gamma^{-2}} - 2d\pi^{-\epsilon} & 0 \\ 0 & r + \frac{2(1-\alpha-\beta)\lambda\rho^{2}\gamma^{-2}}{(\mu^{2}\gamma^{-2})^{2}} & \frac{(1-\alpha-\beta)\lambda\gamma^{-2}}{\mu^{2}\gamma^{-2}} - k - \delta - \Psi \end{bmatrix}$$

根据 $I_{yapunov}$ 稳定性理论可知, 动力系统的局部稳定性取决于 J_{acobi} 矩阵的特征值。一般来讲, 对于四维动力系统的平衡点按照坐标是否为零划分, 可能有 16 种类型。 而针对本系统而言, 具有实际意义的平衡点类型只有 8 个, 即 $P_1(\mathbf{x}^{(u)}, \mathbf{0}, \mathbf{0}), P_2(\mathbf{x}^{(u)}, \mathbf{y}^{(u)}, \mathbf{0}, \mathbf{0}), P_3(\mathbf{x}^{(u)}, \mathbf{0})$ 0, $\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}$, $\mathbf{0}, \mathbf{0$

下面分别讨论系统在平衡点附近的稳定性。

(1)对于 P.(z⁽¹⁾,0,0,0),其物理意义对应于系统的初始状态,只有营养物质浓度,而浮游 植物(藻类)和浮游动物密度以及海水中有机物和无机物微小的碎屑浓度为零。此时系统的 Inchi 哲能

$$J = \begin{bmatrix} -k & \frac{-ax^{(1)}}{b(\epsilon + x^{(1)})} & 0 & \phi \\ 0 & \frac{ax^{(1)}}{b(\epsilon + x^{(1)})} - k - r - s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & -k - \phi - \Psi^{-1} \end{bmatrix}$$

可以计算得到矩阵的特征值为0、-k、 $-(k+\phi+\Psi)$ 、 $\frac{as^{(1)}}{k(s+s+s)}$ 。

而且,由 $P_1(x^{(i)},0,0,0)$ 为平衡点,即 P_1 使系统的右端项为零,有 $f_1(P_1)=f_2(P_1)=f_3(P_1)=f_4(P_1)=0$,进而可以得到 $x^{(i)}=N_0$ 。

所以,若特征值 $\rho = \frac{\alpha x^{(1)}}{\delta(e+x^{(1)})} - (k+r+s) > 0$, 即 $x^{(1)} > \frac{be(k+r+s)}{a-b(k+r+s)} > 0$ 时, 系统必不稳定。

当ρ<0时,对应矩阵的特征值有一个为零,而其余特征值皆负,此时系统为一个余维1的

情况,利用中心流形定理对原方程进行降维处理。经过分析可知,0<0时系统是稳定的。

" $\rho = 0$ 时,即 $x^{(t)} = \frac{bc(k+r+s)}{a-b(k+r+s)}$,此时对应矩阵有两个特征值为零、系统将会发生杂维 2 的時临界分位。由于系统中的全部参数应有各自的取值范围,而对于所给定的所有参数在其变化范围内,此种情况可不予考虑(此处代人系统默认的参数值进行分析得到的结果为 $\frac{bc(k+r+s)}{a-b(k+r+s)} = 0.0095$,而 N_s 默认值范围是 0.1-2.0,所以讨论中不予考虑)。

若 N_0 取得很小,即有 $x^{(1)} = N_0 < \frac{bc(k+r+z)}{a-b(k+r+z)}$ 时,系统在平衡点处稳定。结合实际意义可知 系統的照利尼下槽美物原油度组入 系统在 P. 對诉錄它, 未辦当然不合为生。

所以通常情况下,总有 $\rho>0$ 城立(在系统的参数的取值范围内,除极个剔取法外),即所 防的海域中只有营养物质而汇英能序游动植物及碎屑,几乎是不可能稳定的(此种情况若真 出现。是参加下不考虑)。

(2)对于 $P_1(z^{(1)},y^{(2)},0,0)$,由于 $P_2(z^{(2)},y^{(2)},0,0)$ 为平衡点,即 P_2 使系统的右端项为 $\pi_f(P_2)=f_1(P_2)=f_2(P_2)=f_1(P_2)=0$,进而可以得到: $z^{(2)}=N_0,y^{(2)}=0$ 。因此归入第一—新修 N_0

(3)对于 P₃(x⁽¹⁾,y⁽⁰⁾,z⁽¹⁾,0),由于 P₃(x⁽¹⁾,y⁽⁰⁾,z⁽¹⁾,0)为平衡点,即 P₃使系统的右端项 为零.有 f₂(P₃)=f₂(P₃)=f₃(P₃)=0, y⁽¹⁾,z⁽¹⁾应衡足方程组

$$\frac{a b y^{(j)^2} z^{(j)}}{(\mu^2 + y^{(j)^2})} - d z^{(j)^2} = 0$$

$$(1 - \alpha - \beta) \frac{\lambda y^{(j)^2} z^{(j)}}{(\mu^2 + y^{(j)^2})} + r y^{(j)} = 0$$
(4-25)

方程组中涉及的参数有 α , β , λ , α ,d,r,在按照参数表中参数可取值进行调整后,得到 $y^{(i)}$ 的值可能为零、复数(虚部非零)、负数。根据实际意义可知,作为浮游植物密度的 $y^{(i)}$ 只可能取零。若 $y^{(i)}$ = 0,则有 $z^{(i)}$ = 0。

这种情况再次归结为第一种情形。

(4) 对于 $P_4(x^{(i)}, y^{(i)}, 0, w^{(i)})$,由于 $P_4(x^{(i)}, y^{(i)}, 0, w^{(i)})$ 为平衡点,即 P_4 使系统的右端 项为零,有 $f_1(P_4) = f_2(P_4) = f_3(P_4) = 0$ 。由 $f_4(P_4) = 0$ 得到 $w_1^{(i)} = \frac{r_2^{(i)}}{k + \beta + w}$:由 $f_2(P_4) = 0$ 得到 $x_1^{(i)} = \frac{e(k + r + s)(b + cy_1^{(i)})}{a - (k + r + s)(b + cy_1^{(i)})}$,再代人 $f_1(P_4) = 0$,则可以需出 $y_1^{(i)}$ 。此种情况下是可以计算出 P_4 的信息,因为一个企业的证明。

如果选择参数取款认值时的情况进行分析, 有意义的 P_a 只有 1 个, P_a (0.014 146 6, 0.167 995, 0, 0.109 301), 而相应的 Jacobi 矩阵的特征值分别为: -1.767 73, -0.391 44, 0.143 731, -0.113 233, -0.113 234, -0.113 235, -0.113 233, -0.113 234, -0.113 234, -0.113 234, -0.113 234, -0.113 234, -0.113 246, -0.113 234, -0.113 235, -0.113 234, -0.113 234, -0.113 234, -0.113 234, -0.113 234, -0.113 234, -0.113 234, -0.113 234, -0.113 234, -0.113 234, -0.113 234, -0.113 234, -0.113 235, -0.113

为了说明系统的变化情况,选取混和层下营养物质浓度 N。为分岔参数进行如下分析。

分別版 N_e=0.1,0.3,0.6,0.8,1.0,1.2,1.5,1.8,2.0,2.6,3.0,3.8,4.4.8,10,16,30,发現 所有平衡点(数字角度)中的 y⁽ⁿ⁾的変化与 N_e 的変化成正比(参見閣 4-17(a)、閥 4-17(b))。 求 得平衡点后計算特征値,得到的結果表明,系统在平衡点处皆不稳定。

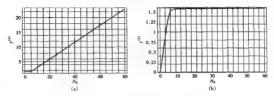


图 4-17 平衡点 P₄ 处 y(1)关于 N₀ 的变化 (a) \$\phi = 0.1, k = 0.05; 8 = 0.33; (b) \$\phi = 0.8, k = 0 13, 8 = 0.8

先后将参数 ϕ 、k、 β 调整到 0.8、0.13、0.8,进行类似地分析,得到的结论是一数的,即所有平衡点皆不稳定,1 τ ⁴⁰殖 N。的增大而增加。

而且通过计算还得到这样一种结论:对于所有平衡点(仅从数学角度计算得到),系统在其 斯语雅·稳定,即系统在超平面 (z)=0 上是不稳定的。可以这样理解:系统即使有过 z(z) -0 的瞬间,4 全个 动排入 到 z(z)>0 於空间中去。

所以一日出現浮辦动物密度 (1) 趋于零的情况,则系统必然是不稳定的。而此时浮游植物密度 y(1) 关于 N。的变化趋势说明;虽然该平衡点不稳定,但这种不稳定性的存在,也说明了系统本身的不确定性与复杂性,在某种外界拨动出现时就会发生赤裸。

(5)对于 $P_5(x^{(0)},0,x^{(0)},w^{(0)})$,由于 $P_5(x^{(0)},0,x^{(0)},w^{(0)})$ 为平衡点、即 P_5 使系统(1)的右端项为零、即有 $f_1(P_5)=f_2(P_5)=f_3(P_5)=f_4(P_5)=0$ 。显然得到 $x^{(0)}=w^{(0)}=0$,归给为第一种类型。

(6)对于 $P_a(z^{(a)},y^{(b)},z^{(a)},w^{(a)})$,系统的平衡状态为食物链中的四种主体都存在的情况,也是赤洲发生的基础条件。此时,其 Jacobi 矩阵

$$\int_{z}^{z} \frac{-d\epsilon^{(0)}}{(\epsilon+x^{(0)})^2(k+q^{(0)})} \cdot \frac{z}{(\epsilon+x^{(0)})(k+q^{(0)})^3} \cdot \frac{2\beta g^2}{(\mu^2+y^{(0)})^3} \cdot \frac{\beta g^{(0)}}{\mu^2+y^{(0)}} \cdot \frac{\beta g^{(0)}}{\mu^2+y^{(0)}} \cdot \frac{4\beta g^{(0)}}{\mu^2+y^{(0)}} \cdot \frac{1}{\mu^2+y^{(0)}} \cdot \frac{1}{$$

由 P, 满足 f,(P,)=0 可得

$$w = \frac{(1 \cdot \alpha - \beta)}{(k + \phi + \Psi)} \frac{\lambda y^2 x}{(\mu^2 + \gamma^2)} + \frac{\gamma r y}{(k + \phi + \Psi)}$$
(4-26)

代人 $f_1(P_6)=f_2(P_6)=f_3(P_6)=0$ 后得到的方程组相当复杂,无法求出解析表达式,所以

借助于数值仿真的方法、分析系统的稳定性和分分情况。

首先对系统条数取品且实际者以的野认值时的情况讲行分析。在条数取赠认值时系统为

$$\frac{dx}{dt} = 0.03 - 0.05x - \frac{0.2sy}{(0.03 + x)(0.2 + 0.4y)} + \frac{0.198y^2z}{0.001 \cdot 225 + y^2} + 0.5x^2 + 0.1w$$

$$\frac{dy}{dt} = -0.24y + \frac{0.02sy}{(0.03 + x)(0.2 + 0.4y)} + \frac{0.09^2z}{0.001 \cdot 225 + y^2}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{0.15y^2z}{0.001 \cdot 225 + y^2} = z^2$$

$$\frac{dw}{dt} = 0.15y + \frac{0.252y^2z}{0.001 \cdot 225 + y^2} - 0.23w$$

$$(4-27)$$

计算该系统的平衡点,可得到 13 组解(其中7组为实数解),而基正有实际意义的只有3 组第:20(10.6,0,0,0),2(0.014 146 6,0.167 595,0,0.103 01),2(0.330 718,0.033 739 7,0072 938 8.0 960 134 1),

①该系统在平衡点 O.(0.6.0.0.0)的 Jacobi 矩阵

$$\boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} -0.05 & -0.952 & 381 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.712 & 381 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.15 & 0 & -0.23 \end{bmatrix}$$

其特征值为:0, -0.05, -0.23, 0.712 381。所以系统在 Q, 处不稳定,结论与前面分析所得完全相符(属于情况 1)。

②该系统在平衡点 0,(0.014 146 6,0.167 595,0,0.103 01)的 Jacobi 矩阵

$$\boldsymbol{B}_{2} = \left[\begin{array}{ccccc} -1.982 \ 17 & -0.179 \ 75 & 0.189 \ 726 & 0.1 \\ 1.932 \ 17 & -0.060 \ 250 \ 3 & -0.574 \ 926 & 0 \\ 0 & 0 & 0.143 \ 731 & 0 \\ 0 & 0.15 & 0.241 \ 469 \ -0.23 \end{array} \right]$$

其特征值为: - 1.767 73, - 0.391 44,0.143 71, - 0.113 253。所以系统在 Q. 处不稳定(属于情况 4)。

③该系统在平衡点 0,(0.330 718,0.033 739 7,0.072 250 8,0.060 134 1)的 Jacobi 矩阵

$$\boldsymbol{B}_3 = \begin{bmatrix} -0.057\ 287\ 3 & -0.592\ 868 & 0.167\ 622 & 0.1 \\ 0.007\ 287\ 31 & -0.079\ 786 & 0 & 0 \\ 0 & 0.160\ 39 & -0.072\ 250\ 8 & 0 \\ 0 & 0.419\ 456 & 0.121\ 381 & -0.23 \end{bmatrix}$$

其特征值为: ~0.078 311 7 + 0.224 441i, ~0.078 311 7 0.224 441i, ~0.227 387, ~0.052 493 9。 所以系统在 0. 处稳定。

以初始条件 z(0) = 0.4, y(0) = 0.1, z(0) = 0.05, w(0) = 0.08 模拟系统状态变化,如图 4-18、图 4-19、图 4-20、图 4-21、图 4-22 所示。

下面采用數值計算的方法、分析四维的空间区域: $\Omega = |(x,y,z,w)|x \ge 0,y \ge 0,z \ge 0,w$ ≥ 0 中系统的稳定性,以及考察 3 个超平面 y = 0.x = 0.w = 0 上的稳定性。

将营养盐液度 z(t)在混合层下的值 No 作为分岔参数对系统进行分析,通过大量的数值

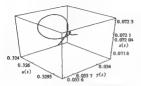


图 4-18 | x(t), y(t), x(t) | 在 Q, 附近的稳定性态

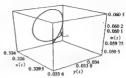


图 4-19 | x(t), y(t), w(t) | 在 0、 附近的稳定性态

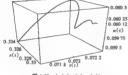


图 4-20 | x(t), z(t), w(t) | 在 Q, 附近的稳定性态

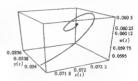


图 4-21 $\{y(t),z(t),w(t)\}$ 在 Q,附近的稳定性态

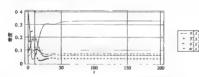


图 4-21 $\{x(t), y(t), z(t), w(t)\}$ 在 O_t 附近的时程曲线

计算(参见表 4-3、表 4-4、表 4-5、表 4-6),可得到如下结论:

①当 $0.1 \le N_0 \le 0.635$ 6时,系统在域 Ω 内只有1个稳定的平衡点,而在域 Ω 外有3个稳定的平衡点;

②当 $0.635 \, 8 \le N_0 \le 1.678 \, 2$ 时,系统在域 Ω 内只有 $\|$ 个稳定的平衡点,而在域 Ω 外也只有 $\|$ 个稳定的平衡点;

③当 1.678 $3 \le N_0 \le 80$ 时,系统在域 Ω 内有 3 个稳定的平衡点,而在域 Ω 外有 1 个稳定的平衡点。

所以在系统参数除 N_0 外,其他参数皆取數认值时,系统有静态分岔参数 $N_1\approx 0.635$ 7 和 $N_1\approx 1.678$ 25。

通过编程计算,在表 4-3、表 4-4、表 4-5、表 4-6 中列出了不同的 N_o 取值分别在不同的 a 值 (普密植物密度)最大生长率)的情况下所对应的域内和域外的平衡点。值得社查的是,域 例外的稳定平衡点的坐标摘足: x < 0, y > 0, z > 0, w > 0, 而若 y < 0, 则在其附近不会引发赤 棚、故不予考虑。

素 A.3 α=0 2 始発度三条占→資金

#o		□ 城内撤定	(1.7.1,0)		□ 地外推定平衡点(x,y,z,w)			
					-4.204 35,	1.045.15,	0.149 832,	9.845 597
0.1	0.022 477 9,	0.086 236 7.	9.036 672 1,	9.0658116	-0.975 \$1,	0.141865,	0.141.394,	0.238 55
					-0.309 888,	0.044 936 5,	0.093 365 2,	0.092 980 1
					-4.607 ·G.	1.0601.	0.149 832.	0.846 279
0.3	0.101 859.	0.028 076,	0.056 730 1,	0.063 504 8	-0.757 500.	0.137 807,	0.140.915,	0.234 944
					-0.300 775,	0.002 927 3,	0.104.363,	0:114073
					-3.712 72,	1.007.55,	0 149 833,	0.847 (66
0.6	0.330 738,	0.033 739 7,	0.072 250 8,	0.000 (34 (-0.374 081,	0.130 105.	0.136.259,	0.217 956
					-0.200 546,	0.086 963 3,	Q. 129 BIS.	0 181 263
					-3.677 8,	1.907 75.	0.149 833.	0.867.294
0.635 6	0.362 5,	0.094 098,	0.072 910 2,	0.064 027 8	-0.271 225,	0 107 09,	0.435 534,	0.203 996
					-0 261 673,	0.105 339,	0.135 067,	0.201 992
0.635 8	0 302 68.	0.024 099 5,	0.072 9(3 6,	0 061 032 5	-3.677 61.	1 007 75,	0.149 833,	0.847 295
1	0.705.712,	0.035 691 8,	0.006 467 1,	0.005 988 1	-3.321 21,	1.00%,	0.149834,	0.948 75
16712	1.371 65,	0.036 651 5,	0.078.455.5,	0.000 052 3	-2.62%,	1.665 67,	0.149 835,	0.852.469
	0.295 963,	0.218 095,	0.146 234,	0.290 4G3				
1.678 3	9.297 829,	0.217 6,	9.146.217,	0.290 076	-2.65214,	1.05 €7,	0 149 835,	0.852 47
	1.371.73,	9.086 651 6,	0.678 405 6,	0.00E 0G 6				
	0 154 624,	0.365 08,	0.14643,	9.386.07				
2	0.777.785,	0 176 238,	0.144346,	0.367.52	-2.35434,	1.69.45,	0.149 836,	0.854 933
	1.690 04.	0.036 854 3,	0.0753654,	0.09-490 [
	0.151 639,	0.407 102,	0.149 23,	0.400 339				
2.5	1.312 (7,	0: 1dB 229,	0.107%,	0.3857	~1.80294,	1.007 fR,	€ 149 €39,	0.860 27
	2.18826,	0.037 096 2,	0.099 236 9,	0.0900736				
	0.185 277,	0.649 787,	0.149 523,	0.567 513				
3	1.836 56.	0.16440,	8.165.59,	0.257 971	-1.42157,	1.000-07,	8.50936,	0.368 766
	2.686 61,	0.087 185 5,	9.879 527 2,	0.078 459 9				

N_{0}		□ 城內豫定刊	新 直(x, y, x, w)		△ 城外確定平衡点(z, y, z, w)			
	0.401 194,	0.8836,	0.169702,	0.713 791				
	2.839 09,	0.561 806,	0.143 295,	0.255 SI	-0.655 5%,	i 145 57,	0.149 86.	0.911151
	3.694 62,	0.897 341.3,	9.079 949 5,	0.0789252				
	1.066.35,	0.953-665,	0.149798,	0.78575				
5	3.844.94,	0.160.399,	0. HG NG,	0.254 356	-0.234 788.	13261,	0.149 855,	1.006 69
	4.663.47,	0.037 431 6.	0.000-000 3,	0.071 195 2				
	1.897.5%,	0.987 441,	0.149 012,	0.887 915				
6	4.848 35,	0:159.582,	0.143 116,	0.253 684	-0.158708,	1.575-4,	0.149 926,	1.191 62
	5.602.71,	0.037 490 9,	0.080 HE L	0.073 375 6				
	3.827 91,	1.087 35,	0.148 839,	0.830 922				
S .	6.832 16,	0.158 672,	0.143-04,	0.252 992	-0.092 000 9,	2.12836,	0.149 559,	1.552 33
	7.68179,	0.037 563 4,	0.000 202 3.	0.071.598				
	5.80446,	1.064 05,	0.10 \$22,	0.25 24				
10	8.854.34.	0.158 176,	0.142.999,	0 252 522	-0.070 094 1,	2.69423,	0.149 975,	1 921 4
	9.68124,	0.037 606 2,	9.000 377 4,	0.071 715 7	j			
	10.783 5,	1.029 05,	0.149 831,	0.829 213				
15	13.856 8.	0 157 565,	0 142 917,	0.252 065	-0.051 HI 8,	4.191,	D. 549 989,	2.839 69
	14.680-5,	0.687 662 5,	0.0004069,	0.071 983 5				
	15.775 7,	1.022.27	0.10 (21,	0.030-661				
20	18.856,	0.157 279,	0.142 972.	0.251 770	- 0.064 252 6.	5.50747,	0:149 994,	3.782.25
	19.600 2.	0.037 600 3,	0.889 563 9,	0.073 966 3				
	25.769 2,	1.094 13,	0.509 \$25,	0.431 975				
30	28.859 2,	0.157 005.	0.142 (69),	0.258 55	- 0:098 665 9.	1.406.55,	0.149 997,	5.646 87
	29.679 1,	0.087 717 9,	0.000 5% 5,	0.072 048 5				
	35.766 3,	1.424.95,	9.99 825,	0.832 415				
40	38.859 7,	0 156 872,	0.542 857.	0.251 429	0.036 228-6.	11 266 5,	0.149 559,	7 512 09
	39.679 6,	0.027 731 6,	0.000 625 6,	0.072 009 3				
	65.7647,	1.025 41.	0.149 125,	0.832 713				
50	40 860 1,	0.156794	0.142 88,	0.251 374	- 0.094 183 I ,	84 126 B,	0.149 999,	9.377 51
	0.695,	0.697 739 7,	0.000 GEL S,	0.872 (13 7				
	55.363 7,	1.025 71 ,	0.109 836,	0.832 907				
60	38.860-3,	0. LS6 74Z,	0.142.676,	0.251 331	-0:033 956 2,	16.987 3,	0.149 999,	11.363
	39.679 5,	0.697 745 2,	0.000-652.5,	0:072 13				
	75.782 4,	1.596 07,	0.109 826,	0.033 646				
10	78.860.5,	9.156 678,	8.50 87,	0.251 277	-0.822 985 9.	22,700 4.	0.15,	14.5942
	79,679 4	0.697 752.	0.000 666.	0.072 150 2				

表 4-4 a=0.28 的稳定平衡点一覧表

N ₀		0 域内稳定平	斯 点(x,y,z,w)		Ωž	《外稳定平衡	ξ(x, y, z, w)	
0.1	0.014 468,	0 017 288 9.	0 029 421 7,	0.017 598 3	-7.396 68,	1.958 09,	0.149 952,	1.441 26
0.6	没有稳定平衡	i点,但有稳定i	海维 Hopf 分岔		-6.899 84,	1.958 99,	0.149 952.	1.441 85
2	0.044 028 9,	0 376 13,	0.148 712,	0.406 84	5.511 69,	1.962 38,	0 149 952,	1.444 06
6	0.171 328,	1.481 01,	0.149 916,	1 130 04	-1 651 19,	2.002 28,	0 149 954,	1.470 98
8	0.895 558,	L.845 89,	0.149 946,	1.368 07	-0 376 321,	2.2097,	0.149 962,	1.605 37

N_0		Ω 域内稳定平衡点(x,y,z,w)				Ω域内稳定平衡点(x,y,z,w)				Ω 域外稳定平衡点(x,y,z,w)			
10	2.666 41,	1 911 44,	0 149 95,	1.410 83	- 0.147 669,	2 716 4,	0.149 975,	1.93586					
15	7.589 22,	1 933 52,	0.149 951,	1.425 23	-0.071 108,	4.124 81,	0 149 989,	2.854 42					
20	12.572 5,	1 938 3,	0.149 951,	1.428 35	- 0.054 699 8,	5.550 45,	0.149 994,	3 784 19					
30	22.561 2,	1.941 53,	0.149 951,	1.430 45	-0.043 696 2,	8.407 99.	0.149 997.	5.647 81					
40	32 556 8.	1.942 78,	0 149 951,	1.431 27	-0.039 467 2,	11.267 5,	0.149 999,	7.512 7					
50	42.554 5,	1 943 44,	0.149 951,	1.431 7	0.037 231 9,	14 127 5.	0.149 999,	9 377 95					

書 4.5 a=0 4 的建定平衡点一贯書

			44.4-2 0	- U. T NJ WEAL	1 May 10-44			
No	- 1	2.域内稳定平#	há(1,7,1,w)	☑ 域外稳定平衡点(x,y,z,w)				
0 1	0 009 287 4,	0 017 911 9,	0.031 132 3,	0.018 761 2	-11.893 8,	3 244 51.	0 149 983,	2 280 3
0.6	0 044 906 9.	0.058 182 6,	0 110 143,	0.126 558	- 11 395 5,	3 244 98,	0.149 983,	2.280 6
2	0 021 371,	0.382 507,	0 148 755,	0.411 091	- 10 001,	3 246 55.	0.149 983,	2.281 62
6	0.045 681 9,	1.516 94,	0.149 92.	1.153 48	-6 030 48,	3 254 99.	0.149 983.	2.287 13
В	0 08i 315 2,	2.078 8,	0.149 957,	1.519 99	-4.066 55,	3.265 31,	0.149 983,	2.293 86
10	0.179 222,	2.622 89.	0.149 973,	1.874 87	-2 164 7,	3 293 39,	0.149 983,	2 312 17
15	3.182.2,	3 194 16,	0 149 982,	2 247 45	-0.167 977,	4.152 52,	0.149 989,	2.872 49
20	8.098 4,	3.218 13.	0 149 982,	2.263 09	-0.084 325 2.	5.558 93.	0.149 994	3.78972
30	18.068 2,	3.226 75.	0.149 982,	2.268 71	- 0 054 311 3,	8.411 03,	0.149 997,	5.649 8
40	28 059 5,	3.229 26.	0.149 982,	2.270 35	-0 045 636 3,	11 269 2,	0.149 999,	7.513 85
50	38.055 3,	3.230 44,	0.149 982,	2.271 12	~0 041 520 4.	14.128 8,	0.149 999,	9.378 75

表 4-6 a=0.9 的稳定平衡点一覧表

N_0	- (加内稳定平衡	(x,y,r,w)	G 域外稳定平衡点(z,y,z,≥)				
0.1	0.003 676 3,	0.018 562 4,	0.032 929 1.	0.020 026 2	- 30 220 7,	8 487 24,	0.149 997,	5.699 5
0.6	0 011 002 7.	0.061 695 2,	0.113 479,	0.134 297	- 29.721 3,	8 487 39,	0.149 997,	5.699 6
2	0.006 801 6,	0.386 611.	0.148 781,	0.4(3 824	- 28.322 9,	8.487 86,	0.149 997,	5.699 91
6	0.011 053 2,	1 526 85,	0.149 921,	1 159 95	- 24.328 6,	8.489 5,	0.149 997,	5 700 97
8	0 014 551,	2.097 89,	0.149 958.	1.532.45	- 22 332 3,	8.490 54,	0 149 997,	5.701 65
01	0 018 818 6,	2 668 77,	0.149 974,	1.904 8	- 20.336 6,	8.491 78,	0 149 997,	5 702 46
15	0.034 511 7,	4.094 59,	0.149 989,	2.834 71	- 16.2.352 4,	8.4963,	0.149 997,	5.705 41
20	0.065 341 2,	5.516 11,	0.149 994,	3 761 8	- 10.383 3,	8 505 13,	0.149 997,	5.711 17
30	0 842 205,	8 154 56,	0.149 997,	5.482 53	- 1.160 18,	8.727 38,	0.149 998,	5.856 11
40	9.812 09,	8.449 25.	0 149 997,	5 674 72	-0 130 089,	11.293 4,	0 149 999,	7.529 61
50	19.761 7,	8.463 65,	0.149 997,	5.684 11	-0 079 752 8,	14.139 7,	0 149 999,	9 385 89

在此将平衡点中的 $y^{(i)}$ 绘制成图形, 在某个 N_0 值对应多个平衡点时, 只考虑 $y^{(i)}$ 值最大的平衡点(考察是否会引发赤襕), 如图 4-23、图 4-24、图 4-25、图 4-26、图 4-27、图 4-28 所示。

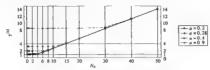


图 4-23 城 C 外平衡点的坐标 y⁽⁶⁾ 关于 N。值的变化

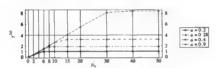


图 4-24 域 Ω 內平衡点的坐标 $y^{(6)}$ 关于 N_0 值的变化

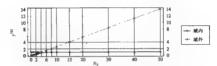


图 4-25 系统在 a = 0.2 时的稳定平衡点的坐标 y^(a)关于 N₀ 值的变化

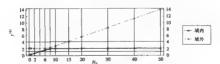


图 4-26 系统在 a=0.28 时的稳定平衡点的坐标 $y^{(6)}$ 关于 N_0 值的变化

比较 $\alpha=0.2$ 与 $\alpha=0.28$ 时系统所具有的稳定平衡点,发现虽然 N_0 增大时域 Ω 内的平衡

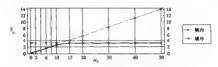


图 4-27 系统在 a=0.4 时的稳定平衡点的坐标 y⁽⁶⁾关于 N₆ 值的变化

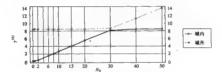


图 4-28 系统在 a = 0.9 时的稳定平衡点的坐标 v⁽⁴⁾ 关于 N₀ 值的变化

当 α = 0.4 且 N_0 = 6 时,系统内外汇的 $\gamma^{(6)}$ 坐标值分别为 1.516 94 和 3.254 99;而当 α = 0.9 且 N_0 = 6 时,系统内外汇的 $\gamma^{(6)}$ 坐标值分别为 1.526 85 和 8.489 5。所以在实际的海域中,若有各种因素导致 N_n 或 α 的异常增大,则极有可能引发赤褥。

系统发生了分位,说明 N_e (混和层下营养物质浓度)的变化会引起性态发生根本变化,若 無配合有其他酶机抗动,则极可能导致赤潮的发生。

由于系统本身参数众多且变化复杂,对系统作用显著,并与赤潮发生密切相关的参数才是 应書重关注的,如浮游植物密度的最大生长率α,其大小直接导致系统状态稳定性的变化。

在此分析了当大部分參數取款认值时,系统对 $N_{\rm e}$ (龍和尼下書养物质浓度)和 α (浮游植物密度的最大生长率)的变化而产生的分弦观象,以及可能导致赤欄产生的原因,即系统汇的 第二个坐标值, $\gamma^{\rm e}$ 出速增长的条件。至于多大的 $\gamma^{\rm e}$ 值才能引发赤潮,要看导致赤潮的藻类的 按度阈值的大小。

(7)对于 P₇(0, y⁽⁷⁾,0,0),将其代人式(4-21)可知,此类平衡点不会出现。

(8)对于
$$P_s(0,y^{(t)},z^{(t)},\omega^{(t)})$$
,将其代入(4-21)可得 $\frac{a\partial y^{(t)^2}z^{(t)}}{(\mu^2+y^{(t)^2})}$ — $dz^{(t)^2}=0$,即有 $z^{(t)}=0$

 $\frac{a\lambda y^{(0)^2}}{d(\mu^2+y^{(0)^2})} g_{\lambda} z^{(0)} = 0, 进一步分析可得 y^{(0)} \approx 0 g_{\lambda} y^{(0)} < 0, 星然 P_{\delta}(0,y^{(0)},z^{(0)},w^{(0)}) 已 无实$

际意义。

该四维动力系统是否会产生(高维)Hopf 分岔,则可选定分岔参数(系统中的参数或系统

中若干参数的函数),只要系统在求得的平衡点处满足(高维)Hopf 分岔定理的条件,则系统在平衡点附近存在 Hopf 分岔。

4.3.3 赤潮藻类食物链模型的高维 Hoof 分岔

由于确定系统形式的复杂性,求得解析形式的高维 Hopf 分岔条件相当困难,在参数取默 认值的前提下,系统的稳定性与系统的两类平衡点在大部分情况下有密切关系。

当 a=0.28,而 $N_0=0.6$ 时,系统可能存在稳定的高维 Hopf 分岔。在此作详细分析。

1.确定系统在 a=0.28 时稳定性分岔区域

①若 N₀ = 0.578 553, 在域 Ω 内平衡点为 Q₁(0.131 502, 0.048 105 5, 0.098 080 6, 0.101 64), Q, 处 Jacobi 矩阵的特征值为

 $[-6.905 \ 12 \times 10^{-7} + 0.291 \ 49i, -6.905 \ 12 \times 10^{-7} - 0.291 \ 49i, -0.220 \ 978, -0.072 \ 872 \ 5]$

②若 N₀ = 0.578 555, 在域 Ω 内有平衡点为 Q₂ (0.131 504, 0.048 105 9, 0.098 081 2, 0.101 641), Q, 处 Jacobi 矩阵的特征值为

2.880 53 × 10⁻⁶ + 0.291 487i, 2.880 53 × 10⁻⁶ + 0.291 487i, -0.220 978, -0.072 872 4

③若 N₀ = 1.101 472,在域 Ω 内有平衡点为 Q₃(0.097 456 1,0.126 86,0.139 3,0.224 098), Q, 处 Jacobi 矩阵的特征值为

 $|7.479\ 43\times 10^{-7}+0.252\ 174i,\ 7.479\ 43\times 10^{-7}-0.252\ 174i,\ -0.206\ 134,\ -0.119\ 223|$

④若 N_0 = 1.101 473,在城 Ω 内平衡点为 Q_4 (0.097 455 8,0.126 87,0.139 3,0.224 098), Q_4 处 Jacobi 矩阵的特征值为

↓ -3.833 45×10⁻⁷ +0.252 174i, -3.833 45×10⁻⁷ -0.252 174i, -0.206 134, -0.119 223i 显然 Q₁、Q₄ 为稳定平衡点, Q₂、Q₃ 为不稳定平衡点。

所以在 a=0.28 时,系统关于 N_0 在 0.578 553 与 0.578 555 之间以及 1.101 472 与 1.101 473 之间有稳定性分岔参数。而且通过对平衡点的稳定性以及平衡点处 Jacobi 矩阵的特征值关于 N_0 变化的分析,可得如下结论。

縮论 1 当分岔参数 N_o 满足 0.578 554 $45 \leqslant N_o \leqslant 1.101$ 472 3 (精度为 10^{-7})时,系统在域 Ω 内的平衡点不稳定,但存在稳定的高维(四维)Hopf 分岔 (摄限环面),出现高维(四维)Hopf 分岔的参数域为 HBP = [0.578 554 45, 1.101 472 3]。当 $0.1 \leqslant N_o < 0.578$ 554 45 或 $N_o > 1.101$ 472 3(精度为 10^{-7})时,系统在域 Ω 内的平衡点稳定。

在分岔参数域 HBP 内,进一步分析可知:

岩 $N_0=0.734$ 109 6, 系统有不稳定平衡点 Q_5 (0.178 975, 0.058 186 9, 0.110 147, 0.126 567), Q_5 处 Jacobi 矩阵的特征值为

|0.068 595 + 0.214 626i, 0.068 595 - 0.214 626i, - 0.225 361, - 0.073 253 2| 在三维空间 $\Sigma(x,y,z)$ 中絵制的极限环面的菱特方向为 x—y, 但极限环面旋转方向并不明显。

者 $N_0 = 0.734$ 109 7. 系统有不稳定平衡点 Q_0 (0.178 975, 0.058 186 9, 0.110 147, 0.126 567), Q_0 Q_0

1 - 0.225 321,0.068 595 + 0.214 626i,0.068 595 - 0.214 626i, -0.073 253 2

在三维空间 $\Sigma(x,y,z)$ 中绘制的极限环面的旋转方向为 y-z: 但极限环面旋转方向并不明显。 缩论 2 系统存在极限环面旋转方向分岔值 $N_0 \approx 0.734$ 109 65 (精度为 10^{-7})。

2 系统各举分岔性态的数字模拟

在 α = 0.28, Λ_0 = 1·2 时, 观察 200 d(设现察的时间步长为 τ - 0.5 d)的相图,结论是系统 收敛于 Ω 内的稳定平衡点,但在靠近平衡点时却有丰富的动力学行为(参见图 4-29、图 4-30)。

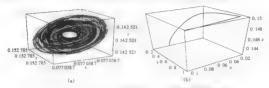
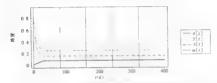


图 4 29 a - 0 28, V_o - 1 2 對系統在域 Σ(x, ν, z)内相障平衡直处的相限 (a)平衡应附近:(b)域 Σ 内



[N 4-30 u=0 28. N=1 2 时系统各类物质浓度的时程图 (200 d)

在 α = 0.28, N_0 = 1.1 时, 稅緊 200 d (设视繁的时间步长为 τ = 0.5 d)的相图。結论是系统 收敛于 Σ 内的稳定 1 环面,作域 Ω 内应为稳定的网维 Hopf 分宏(参见图 4-31、图 4-32)。



图 4-31 a-0.28.No-11系统在域 2(x.v.:)内相応平衡点附近的 1 环面

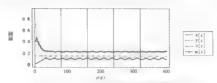


图 4-32 g-0 28, No = 1.1 时系统各类物质旅馆的时程图 (观察 200 d)

观察的时间步长为x=0.5 d)所得到的相图与观察 3 000 d 所得到的相图基本一致(见图 4.33),系统在S(x,y,z)内存在稳定的 (环面,相应地系统在 Ω)内存在稳定的网维 Hopf 分岔。而当 $N_{x}=0.5$ Red p_{x} 所谓的 p_{y} 所谓的

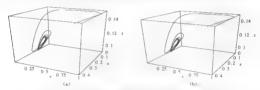


图 4-33 a = 0 28, N_a = 0.6 系统在域 2(x, y, z)内相应平衡点附近的 1 环菌 (a)200 dz(b)3 000 d

比较系统在观察 200 d 与观察 3 000 d 中各类物质浓度(密度)的时程图(见图 4-34、图 4-

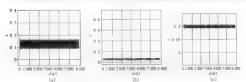


图 4-34 a = 0.28, $N_0 = 0.6$ 时系统的 x(t), y(t), x(t)浓度 (密度)的时程图 (3 000 d)

(a)x(t)浓度的时程图;(b)y(t)浓度的时程图;(c)z(t)浓度的时程图

35)可知, x(t), x(t), x(t)浓度(密度)外于一种无限振荡之中, 日报幅几乎皆保持不变, 汶正 長期 4.33 中面傾起图 11 乎一样的原因。

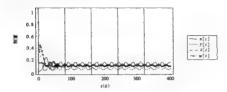


图 4-35 α=0.28, N_a=0.6 时系统各举物后按律的时程图 (200 d)

诵讨以上分析可知,在 Hosef 分岔参数区域 HRP 内部存在着丰富的分岔行为。

在初值相同的条件下, 比较 No = 0.578、No = 0.734 及 No = 1.1 三种情况下观察 200 d 所 得到的相图(见图 4-36),得出如下结论。

极限环面的旋转方向与 N_a 的取值有关、极限环面投影在 $\Sigma(x,y,z)$ 上的 1 环面内径在 No. < 0.734 时,随着 No. 的增加而增大,大约在 No. = 0.734 附近达到最大,此后在 No. > 0.734 时 随着 N。的增加而减小。而环而所围绕的不稳定平衡点的位置也随着 N。的改变有所变化。 $(H \to N_0 \in HRP)$ 时,系统在 $\Sigma(x,y,z)$ 皆存在稳定的 1 环面,相应地在 Ω 内为稳定的四维 Hoof 分分。

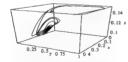


图 4-36 Na = 0.578、Nn = 0.734、Nn = 1 1 时系统在 Σ(x, y, z)内的 i 环面的比较(观察 200 d)

图 4-36 中的 3 个 1 环南中下向上依次为 No = 0.578, No = 0.734, No = 1.1 在相同的初 值10.4.0.9.15.0.0.08! 条件下计算出的系统 在 $\Sigma(z,v,z)$ 内的 1 环面。

在 a = 0.28 时, 系统的稳定件及产生 Hopf 分岔关于参数 No 的变化情况参见图 4-

下面以 No = 0.3 和 No = 6.0 为例加以说 明。

当 N₀ = 0.3、N₀ = 6.0 时, 系统在 Ω 内的

稳定平衡点分别为(0.050 751.0.032 169 8.0.068 691 1.0.055 445 6) 和(0.171 328,1.481 01, 0 149 916.1 130 04)。其相图和时程图分别如图 4-38、图 4-39、图 4-40、图 4-41 所示。

诵讨以上分析,可以得到这样的结论:系统在 Ω 内的性态变化有下列三种可能。

①趋向于稳定的平衡占:

(2)約向干機定的极限环面(Hoof 分岔):

③趋向于域 Q 外的平衡点。

无论哪种情况发生,系统内的各类物质的浓度都不会有暴发性增长。当然在系统汇(Ω

内或外) 藥类浓度 y(t) 的值随着 $a \times N_0$ 的增大而增长,何时会发生赤潮,要看赤潮出现所需藥举浓度的關係。

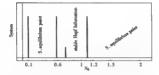


图 4-37 a = 0.28 时确定系统稳定性分岔及 Hopf 分岔的参数值



图 4-38 a=0.28, $N_0=0.3$ 时系统在域 $\Sigma(x,y,z)$ 内相应平衡点附近的相图

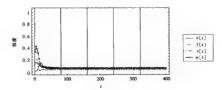


图 4-39 a = 0.28, $N_0 = 0.3$ 时系统各类物质浓度变化的时程图

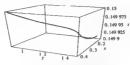


图 4-40 a=0.28, $N_0=6.0$ 时系统在域 $\Sigma(x,y,z)$ 內相应平衡点附近的相图

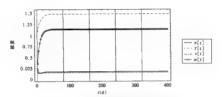


图 4-4] a=0.28, No=6.0 时系统各类物质浓度变化的时程图

第5章 赤潮非线性随机动力学

本章运用非线性随机动力学理论研究了多种群赤潮藻类和赤潮食物链生态模型的稳定性 及分分行为 顯示了随刻分动对于赤翅形成的影响机刻。

5.1 多种群赤潮藻类的非线性随机动力学

5.1.1 多种群赤潮藻类的非线性髓机动力学模型的建立

海洋富营养化是导致赤潮暴发的基本条件。赤潮蒸类之间也存在复杂的相互影响与作 用,分所这些影响与作用对于阐明赤潮发生机现有重要意义。在此选取典型赤潮鬈类——硅 源和甲藻,在海洋富营养化的条件下,考虑两种蒸类之间的相互作用及浮游动物的掮食,建立 维划如下,

$$\frac{dP_1}{dt} = P_1(\epsilon_1 - a_{11}P_1 - a_{21}P_2 - a_{22}Z)$$

$$\frac{dP_2}{dt} = P_2(\epsilon_2 - a_{22}P_1 - a_{22}P_2 - a_{22}Z)$$

$$\frac{dZ}{dz} = Z(-\epsilon_1 + a_{21}P_1 + a_{22}P_2)$$
(5-1)

其中, P_1 、Z 分别代表硅藥、甲藥及浮游动物的密度: $\varepsilon_i(i=1,2)$ 代表兩种黨类的内棄增长 率 i_{\bullet} 代表存跡动物的死亡率: $\varepsilon_a(i=1,2)$ 表示藥类密度制约系数 i_{\bullet} 1.及 e_{\bullet} 2 列表示兩种藥 类之同的相互作用系數、一者之和 $(a_{\bullet}+a_{\bullet})$ 表示藥类同的作用率: e_{\bullet} 1、 a_{\bullet} 2、 a_{\bullet} 1、 a_{\bullet} 2则表示浮 龄动物与藻类之间的油金关系。

现实世界的环境是受到多种醣机因素的作用与干扰的,海洋赤潮的发生当然也不例外。 考虑到海洋及海水区域中硅藻、甲藻及浮游动物的密度变化受到光照、水温、海潮、台风、海啸 以及人类活动等多种随机因素的干扰,所以在模型式(5-1)中加入随机项是必要而合理的。

在模型中,由

$$\frac{dZ}{dt} = Z(-\epsilon_3 + a_{21}P_1 + a_{22}P_2)$$

可得浮游动物作为捕食者的密度 Z 可视为硅藻、甲藁密度的函数、即有

$$Z = C \exp(\left[\left(-\epsilon_3 + a_{21}P_1 + a_{22}P_2\right)dt\right)$$
 (5-2)

其中 C≥0。

所以应当主要考虑随机因素对硅藥和甲藥密度的作用,而在分析浮游动物密度 Z 时随机 因素的作用也得到了体现。

下面建立关于硅藻和甲藻密度的二维随机动力学模型。

由式 5-1、式 5-2 可知 Z 可视为 P_1 、 P_2 的函数,即有 $Z=Z(P_1,P_2)$,进一步假设

$$Z = b^0 + b_{\infty}^1 P_1 + b_{\infty}^1 P_2 + b_{\infty}^2 P_1^2 + b_{11}^2 P_1 P_2 + b_{\infty}^2 P_2^2 + O(P_1, P_2)^3$$

其中 O(P₁, P₂)³ 表示 P₁, P₂ 的次数≥3 的各次项, P₁, P₂ 满足下式;

$$\frac{dP_1}{dt} = (\epsilon_1 - a_{11}b^8)P_1 - (a_{11} + a_{11}b_{11}^4)P_1^2 - (a_{11} + a_{11}b_{11}^4)P_1P_2 - a_{11}P_1(b_{21}^2P_1^2 + b_{11}^2P_1P_2 + b_{22}^2P_2^2) + O(P_1, P_2)^4$$

$$\frac{dP_2}{dt} = (\epsilon_1 - a_{21}b^8)P_2 - (a_{21} + a_{21}b_{11})P_1P_1 - (a_{21} + a_{21}b_{11}^4)P_2^2 - a_{21}P_1(b_{21}^2P_1^2 + b_{11}^2P_1P_1 + b_{21}^2P_2^2) + O(P_1, P_1)^4$$

$$= a_{11}P_1(b_{21}^2P_1^2 + b_{11}^2P_1P_1 + b_{21}^2P_2^2) + O(P_1, P_1)^4$$
(5-3)

本节所采用的参数记法如下。

$$\varepsilon_1 - a_1, b^0 = \varepsilon_2 - a_2, b^0 = \varepsilon$$

$$a_{11} + a_{13}b_{10}^{1} = a_{1}, \quad a_{22} + a_{23}b_{01}^{1} = b_{10}$$

$$a_{12} + a_{13} b_{01}^1 = \alpha$$
, $a_{21} + a_{22} b_{10}^1 = \beta$

其中参数值皆非负。

格系统式(5.3)改写为如下随机非线性动力系统(Stratonovich 意义下):

$$\frac{dP_1}{dt} = uP_1 - aP_1^2 - aP_1P_2 + a_1P_1\mathcal{E}(t) + \beta_1\eta(t)$$

$$\frac{dP_2}{t} = eP_1 - \beta P_2^2 - bP_2^2 + a_2P_2\mathcal{E}(t) + \beta_1\eta(t)$$
(5-4)

从实际意义的角度、 ϵ 仍可視为两种藻类的内壤增长率、 ϵ 、 δ 表示藻类密度制约系数、 ϵ 及 β 分別表示兩种藻类之间的相互作用系数、二者之和(ϵ + β) 表示藻类间的作用率。硅藻和甲藻 受到的桑桂随机激励为 ϵ (ϵ)、与环境及自身浓度等内在因素有关),另外受到的直接影响浓度 变化的外界髓机激励为 η (ϵ)。为便于研究、假设 ϵ (ϵ) 为独立的具有零均值和标准方 给的 Gausa 戶場声。即

$$E[\xi(t)] = E[\eta(t)] = 0$$
, $E[\xi(t)\xi(t+\tau)] = \delta(\tau)$
 $E[\eta(t)\eta(t+\tau)] = \delta(\tau)$, $E[\xi(t)\eta(t+\tau)] = 0$

系统式(5-4)为物理意义下的随机微分动力系统(Stratomovich 意义下的随机微分方程),其中 $\delta(x)$ 为 Dirac 函数,方程(5-4)的各项系数皆非负。

5.1.2 非线性随机动力学模型的随机平均系统

当系统式(5-4)未受到關机撤納时,即 $a_1 = a_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$ 时,其对应的确定系统有 4 个 平衡点,即 $Q_0(0,0)$, $Q_1\left(\frac{\varepsilon}{a},0\right)$, $Q_2\left(0,\frac{\varepsilon}{b}\right)$, $Q_3\left(\frac{(b-a)\varepsilon}{ab-a\beta},\frac{(a-\beta)\varepsilon}{ab-a\beta}\right)$ 。 各点的坐标应为非负 教,所对证的 benchi 铝陈的特征值如表 5-1 所示。

★ 5-1 系统式(5-4)对应的确定系统的平衡点

平衡点	特征值	稳定性
Q ₀ (0,0)	€,€	不稳定
$Q_1\left(\frac{\epsilon}{\sigma},0\right)$	(α-β)ε	a>fl.不稳定
	$-\varepsilon$, $\frac{(\alpha-\beta)\varepsilon}{\alpha}$	e<β,稳定

		媒果
平衡点	特征值	稳定性
$Q_3\left(0, \frac{e}{b}\right)$	$-\varepsilon, \frac{(b-a)\varepsilon}{b}$	δ>α,不稳定
		b < α, 稳定
$Q_3\left(\frac{(b-a)\varepsilon}{ab-a\beta}, \frac{(a-\beta)\varepsilon}{ab-a\beta}\right)$	$-\epsilon$, $\frac{(b-a)(b-\beta)\epsilon}{-(ab-a\beta)}$	a>β且b>a,稳定
		其他情况,需进一步分析

 $\exists t: a = \beta \exists t: Q_1\left(\frac{(b-a)\varepsilon}{ab-a\beta}, \frac{(a-\beta)\varepsilon}{ab-a\beta}\right) \ni Q_1\left(\frac{\varepsilon}{a}, 0\right) \not \triangleq \exists t: b = a \exists t: Q_1\left(\frac{(b-a)\varepsilon}{ab-a\beta}, \frac{(a-\beta)\varepsilon}{ab-a\beta}\right) \ni Q_2\left(0, \frac{\varepsilon}{b}\right) \not \triangleq \exists t: a = \beta \exists t: Q_2\left(0, \frac{\varepsilon}{ab-a\beta}\right) \mid \exists Q_2\left(0, \frac{\varepsilon}{b}\right) \not \triangleq \exists t: a = \beta \exists t: Q_3\left(\frac{(b-a)\varepsilon}{ab-a\beta}, \frac{(a-\beta)\varepsilon}{ab-a\beta}\right) \mid \exists Q_3\left(0, \frac{\varepsilon}{ab-a\beta}\right) \mid \exists Q_3\left(0, \frac{\varepsilon$

中事 5-4 可知。

当 $a < \beta$ 而 $b > \alpha$,且 $ab > \alpha\beta$ 时,则有唯一稳定平衡点 $Q_1\left(\frac{\varepsilon}{\alpha},0\right)$;

当 a > β 而 b < a, 且 ab > aβ 时, 则有唯一稳定平衡点 Q₂(0, ^ε);

当 $a = B \coprod b = a$ 时,由系统可推出 $P_2 = cP_1(c)$ 为常数),即可视为单种群问题。

而对于非线性随机动力系统式(5-4),其随机项的作用是使平衡点的稳定性发生改变,分 岔值发生漂移,即随机系统稳态解会有不同的稳定性与分岔。

无论平衡点 Q,是否稳定,其稳定性的变化是具代表性的。下面先分析系统式(5-4)在平衡点 Q, 厨折的臃机稳定性与臃机分次。

假设 a > B, b > a, 令

$$y_1 = P_1 - \frac{(b-a)\varepsilon}{ab-a\beta}, \quad y_2 = P_2 - \frac{(a-\beta)\varepsilon}{ab-a\beta}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix}^T$$

代人式(5-4)可得系统的扰动方程为

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\mathbf{Y} + f(\mathbf{Y}, \xi(z), \eta(z))$$
 (5-5)

其中

$$A = \frac{\varepsilon}{D} \begin{bmatrix} a(a-b) & a(a-b) \\ \beta(\beta-a) & b(\beta-a) \end{bmatrix}, D = ab - a\beta.$$

研究系统式(5-4)在0,处的稳定性转化为研究式(5-5)在O(0,0)处的稳定性问题。

ix
$$A = PX$$
, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} b - \alpha & -\alpha \\ \alpha - \beta & \beta \end{bmatrix}$

代人式(5-5)可得

$$\dot{X} = P^{-1}APX + P^{-1}f(PX,\xi(z),\eta(z))$$

即得如下系统:

$$\begin{array}{l} \dot{x}_1 = a_1 x_1 - a_{11} x_1^2 - a_{12} x_2^2 + (k_{10} + k_{11} x_1 + k_{12} x_2) \, \xi(t) + r_1 \, \eta(t) \\ \dot{x}_2 = a_2 x_2 - a_{11} x_1 x_2 - a_{22} x_1^2 + (k_{20} + k_{21} x_1 + k_{22} x_2) \, \xi(t) + r_2 \, \eta(t) \end{array}$$
(5-6)

在不与式(5-3)中系数记法发生混淆的情况下,不妨采用如下记法:

$$a_1 = -\epsilon$$
, $a_{11} = (a - \beta)^{-1}D$, $a_{12} = \alpha(a - \beta)\beta^{-1}$
 $a_2 = -(b \cdot \alpha)(a - \beta)\epsilon D^{-1}$, $a_{21} = (a - \beta)^{-1}(2ab - a\alpha - b\beta)$, $a_{22} = (b\beta - a\alpha)\beta^{-1}U = a\alpha + b\beta - 2a\beta$

_

 $k_{i\alpha} = (\alpha - \beta) [(b - \alpha)\beta x_i + (\alpha - \beta)\alpha x_i] \epsilon D^{-1} U^{-1}$

$$\begin{split} k_{i1} &= \left[\left(b - a \right) \beta a_1 + \left(a - \beta \right) a a_2 \right] U^{-1}, \quad k_{i2} = a \left(a - \beta \right) \left(a_2 - a_1 \right) U^{-1} \\ k_{20} - \left(b - a \right) \left(a - \beta \right) \left(a_2 - a_1 \right) U^{-1} D^{-1} \beta t, \quad k_{20} &= \left(b - a \right) \left(a_2 - a_1 \right) U^{-1} \beta t, \\ k_{20} &= \left[\left(b - a \right) \beta a_2 + \left(a - \beta \right) a a_1 \right] U^{-1} \\ r_1 &= \left(\beta p_1 + a \beta p_2 \right) \left(a - \beta \right) U^{-1}, \\ r_2 &= \left(\left(b - a \right) \beta_2 - \left(a - \beta \right) \beta_1 \right) \beta U^{-1} \\ \end{split}$$

$$\begin{array}{c} \text{Theorem Theorem T$$

$$\begin{split} & \left(r_1\cos\theta + r_2\sin\theta\right)\eta(t) \\ & \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = (a_1 - a_1)\cos\theta\sin\theta + a_1^2 a_{12}\sin^2\theta - a_{22}\cos\theta\sin^2\theta + (a_{12} - a_{21})\cos^2\theta\sin\theta\right) + \\ & \left[k_{21}\cos^2\theta + (k_{22} - k_{11})\cos\theta\sin\theta - k_{12}\sin^2\theta + \frac{1}{a}(k_{20}\cos\theta - k_{10}\sin\theta)\right]\xi(t) + \\ & \frac{1}{a}(r_2\cos\theta - r_1\sin\theta)\eta(t) \end{split}$$

(5-7)

目前尚无可行的方法直接计算出系统式(5-7)的精确解。在系统所受到的隨机激励的强度较小时(即系统式(5-4)中的 $a_1, a_2, \beta_1, \beta_2$ 充分小)、根据 Khasminskii 极限定理可知,系统式(5-7)的响应过程[$a(t), \theta(t)$] 斜收敛于一个二维 Markov 扩散过程。对系统式(5-7)应用随机平均法可得到以下扩散过程(1to 随机废分方程):

$$da = m_a dt + \sigma_{11} dW_a + \sigma_{11} dW_\theta$$

$$d\theta = m_\theta dt + \sigma_{21} dW_a + \sigma_{22} dW_\theta$$
(5-8)

其中 $\begin{bmatrix} m_e \\ m_g \end{bmatrix}$ 为票移系数向量, $\begin{bmatrix} \sigma_{31} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{23} \end{bmatrix}$ 是扩散系数矩阵, $W_e(t)$ 、 $W_g(t)$ 为相互独立的标准

Wiener 过程。 系统式 (5-8) 的各项系数为

$$\begin{split} m_s &= \frac{d}{2} \left(a_1 + a_2 \right) + \frac{d}{8} \left(5k_{11}^2 + 5k_{21}^2 + 3k_{12}^2 + 3k_{11}^2 + 6k_{12}k_{11} - 2k_{11}k_{21} \right) + \\ &= \frac{1}{2a} \left(k_{12}^2 + k_{22}^2 + r_1^2 + r_2^2 \right) \\ m_{\Psi} &= 0 \\ \sigma_{11}^2 &= \frac{d}{8} \left(3k_{11}^2 + 3k_{21}^2 + k_{11}^2 + k_{12}^2 + 2k_{11}k_{21} + 2k_{11}k_{21} \right) + \frac{1}{2} \left(k_{12}^2 + k_{22}^2 + r_1^2 r_2^2 \right) \\ \sigma_{21}^2 &= \sigma_{21}^2 = \frac{d}{4} \left(k_{11} + k_{21} \right) \left(k_{12} - k_{12} \right) \\ \sigma_{22}^2 &= \frac{1}{9} \left(k_{11}^2 + k_{22}^2 + 3k_{21}^2 + 3k_{21}^2 - 2k_{12}k_{21} - 2k_{11}k_{21} \right) + \frac{1}{2} \left(k_{12}^2 + k_{22}^2 + r_1^2 + r_1^2 \right) \end{split}$$

所以由式(5-8)中扩散系数矩阵的情况可知,当 $\sigma_{11}^{2} = \sigma_{21}^{2} = 0$ 时,即 $k_{11} + k_{22} = 0$ 或 $k_{21} - k_{12} = 0$ 时,平均搭幅 $\alpha(\epsilon)$ 为一个一维 Markow 扩散可避

$$da = m_{\star} dt + \sigma_{11} dW_{\star}$$

将其改写为

$$da = \left[\left(\mu_1 + \frac{\mu_2}{a} \right) a + \frac{\mu_3}{a} \right] dt + \left(\mu_3 + \frac{\mu_4}{a} a^2 \right)^{\frac{1}{2}} dW_a \qquad (5-9)$$

其中

$$\begin{split} \mu_1 &= \frac{1}{2} \left(\, a_1 + a_2 \, \right) \,, \quad \mu_2 = 5 \, k_{11}^2 + 5 \, k_{22}^2 + 3 \, k_{12}^2 + 3 \, k_{31}^2 + 6 \, k_{12} \, k_{21} - 2 \, k_{11} \, k_{22} \\ \mu_3 &= \frac{1}{3} \left(\, k_{20}^2 + k_{22}^2 + r_1^2 + r_2^2 \right) \,, \quad \mu_4 = 3 \, k_{11}^2 + 3 \, k_{22}^2 + k_{12}^2 + k_{21}^2 + 2 \, k_{21} + 2 \, k_{21} \, k_{22} + 2 \, k_{22}^2 \, k_{21}^2 + 2 \, k_{22}^2 \, k_{22}^2 + 2 \, k_{22}^2 \, k_{2$$

对于确定系统,平衡点 Q_1 附近的稳定性取决于 $a > \beta \pm \delta > \alpha$ 是否成立。而对于随机动 力系统,在此要先分析平均振幅扩散过程 a(t)在奇异边界 a = 0 处的样本轨线的概率意义上 稳定性的变化,然后再来得到条款空间的随机分位点。

5.1.3 以扩散过程边界理论分析随机平均系统性态

分析-维扩散过程式(5-9)在区间[0,+∞)上的解过程的件态。

1. 暴錊在 4、= 0 时的性态分析

当 4, =0 时, 系统化为

$$da = \left[\left(\mu_t + \frac{\mu_2}{2}\right)a\right]dt + \left(\frac{\mu_4}{2}a^2\right)^{\frac{1}{2}}dW_a \qquad (5-10)$$

在 a=0 时, $\sigma_{11}=0$,所以 a=0 为系统式(5-10)的第一类奇异边界;

在 $a = + \infty$ 时, $m_a = \infty$, 所以 $a = + \infty$ 为系统式(5-10)的第二类奇异边界。

根据奇异边界理论可计算出第一类奇异边界 a=0 的扩散指数、漂移指数和特征值分别

为

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = 2 \\ &\beta_1 = 1 \end{aligned}$$

$$c_1 = \lim_{\sigma \to 0^-} \frac{2m_{\kappa} (a - 0)^{\kappa_1 - \beta_1}}{\sigma_{11}^2} = \lim_{\sigma \to 0^+} \frac{2\left(\mu_1 + \frac{\mu_2}{8}\right) a^2}{\frac{\mu_2}{4} a^2} = \frac{2(8\mu_1 + \mu_2)}{\mu_4} \end{aligned}$$
(5-11)

所以,当 $c_1 > 1$,即 $\frac{8\mu_1 + \mu_2}{2} > \frac{1}{2}$ 时,边界 $\alpha = 0$ 为排斥自然边界;

当
$$c_1 < 1$$
, 即 $\frac{8\mu_1 + \mu_2}{\mu_4} < \frac{1}{2}$ 时, 边界 $\alpha = 0$ 为吸引自然边界;

当
$$c_1 = 1$$
, $\frac{8\mu_1 + \mu_2}{\mu_4} = \frac{1}{2}$ 时, 边界 $\alpha = 0$ 为严格自然边界。

对于第二类奇异边界 a = +∞,可以计算出扩散指数、源移指数和特征值分别为

$$a_r = 2$$

 $\beta_r = 1$
 $c_r = -\lim_{a \to +\infty} \frac{2m_a a^{a_r - \beta_r}}{a_{11}^2} = -\lim_{a \to +\infty} \frac{2\left(\mu_1 + \frac{\mu_2}{8}\right) a^2}{\frac{\mu_4}{8} a^2} = -\frac{2(8\mu_1 + \mu_2)}{\mu_4}$
(5-12)

所以, 当 c, > -1, 即 $\frac{8\mu_1 + \mu_2}{4}$ < $\frac{1}{2}$ 时, 边界 $a = + \infty$ 为排斥自然边界;

当
$$c, < -1,$$
 即 $\frac{8\mu_1 + \mu_2}{n_4} > \frac{1}{2}$ 时, 边界 $\alpha = +\infty$ 为吸引自然边界;

当
$$c_r = -1$$
, 即 $\frac{8\mu_1 + \mu_2}{\mu_1} = \frac{1}{2}$ 时, 边界 $\alpha = +\infty$ 为严格自然边界。

综上所述,可得到以下结论。

①当 $\frac{8\mu_1+\mu_2}{\mu_4}$ $< \frac{1}{2}$ 时,a=0为限引自然边界, $a=+\infty$ 为排斥自然边界,所以平凡解 a=0为稳定的,即随机系统在平衡点 Q,为稳定的。这说明原确定系统在平衡点的稳定性,经过随机激励(执动)后,可能仍具有以概率意义的稳定性。

②当 $\frac{8\mu_1 + \mu_2}{\mu_4} > \frac{1}{2}$ 时,a = 0为排斥自然边界, $a = + \infty$ 为吸引自然边界,所以平凡解 a = 0为木稳定的,即随机系统在平衡点 Q,是不稳定的。。这说明原确定系统在平衡点的稳定性,经付额机衡衡化分)后,失去了以概率最又的稳定性。

③当 $\frac{8\mu_1 + \mu_2}{\mu_4} = \frac{1}{2}$ 时, a = 0, $a = + \infty$ 皆为严格自然边界, 此种情况恰好为稳定与否的分界

前文曾提及, $\frac{\beta}{a}$ 与 $\frac{\alpha}{b}$ 是否同时为 1,可以视为确定系统在平衡点稳定性的分岔值,此处 16μ , + $2\mu_2 - \mu_4$ 是否为率,可以视为随机撤励系统在平衡点稳定性的分岔值。

2. 系统在 μ₃ ≠ 0 时的性态分析

当 μ₃ ≠ 0 时,分析系统式(5-9)可得:

在 a=0 时, $\sigma_{tt}\neq 0$,所以 a=0 为系统式(5-9)的非奇异边界,经过计算可判断出,a=0 为规则边界(可达到的);

根据希异边界理论可计算出第一类边界 $\alpha = 0$ 的扩散指数、漂移指数和特征值分别为在 $\alpha = +\infty$ 时, $m = \infty$,所以 $\alpha = +\infty$ 为系统式(5-9)的第二类奇异边界。

$$\begin{aligned} & a_{r} = 2 \\ & \beta_{r} = 1 \\ & c_{r} = -\lim_{\sigma \to +\infty} \frac{2m_{\sigma}a^{\sigma} - \delta_{r}}{a^{\frac{\sigma}{1}}} = -\lim_{\sigma \to +\infty} \frac{2\left[\left(\mu_{1} + \frac{\mu_{1}}{8}\right)a + \frac{\mu_{2}}{a}\right]a}{\left(\mu_{1} + \frac{\beta_{2}}{8}a^{2}\right)} = -\frac{2(8\mu_{1} + \mu_{2})}{\mu_{4}} \end{aligned}$$

$$(5-13)$$

所以, 当 c, > -1, 即 $\frac{8\mu_1 + \mu_2}{\mu_4}$ < $\frac{1}{2}$ 时, 边界 $a = + \infty$ 为排斥自然边界;

当
$$c_r < -1$$
,即 $\frac{8\mu_1 + \mu_2}{\mu_1} > \frac{1}{2}$ 时,边界 $a = + \infty$ 为吸引自然边界;

当
$$c_1 = -1$$
,即 $\frac{8\mu_1 + \mu_2}{\mu_2} = \frac{1}{2}$ 时,边界 $a = + \infty$ 为严格自然边界。

对于边界a=0,过程既可以从内都到达边界,也可以从边界进入内部。结合边界 $a=+\infty$ 的情况可得结论:平凡解a=0为不稳定的,即雕机系统在平衡点Q,是不稳定的,无论原来确定系统在平衡点Q,是否稳定。

3.综合分析

综合前面两类情况($\mu_1 \neq 0, \mu_1 = 0$), 可得以下结论。

①当 $\frac{8\mu_1 + \mu_2}{\mu_4} > \frac{1}{2}$ 时,边界 $a = +\infty$ 为吸引自然边界,系统以概率意义不稳定。从概率意义分析。在 0、 附近几乎不可能产生 Hoof 分岔。

②当
$$\frac{8\mu_1 + \mu_2}{2} < \frac{1}{2}$$
时,边界 $\alpha = + \infty$ 为排斥自然边界。

③若 $\mu_3 = 0$,边界 a = 0 为吸引自然边界,系统在 Q, 处以概率意义稳定;若 $\mu_3 \neq 0$,边界 a = 0 为规则的,随机动力系统在 Q, 处以概率意义不稳定。

是否会在 O、附近产生随机 Hopf 分岔,是下一节要分析的问题。

5.1.4 随机系统的随机 Hopf 分岔

在研究非线性随机动力系统分岔问题时,常用的方法之一就是计算不变测度的极值。不 变测度导随机分岔的一个重要的特征量。

由振幅 a(t)的 Ito 随机微分方程(式(5-9))可得 FPK 方程

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{t}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{a}} \left\{ \left[\left(\mu_1 + \frac{\mu_2}{8} \right) \mathbf{a} + \frac{\mu_3}{a} \right] \mathbf{p} \right\} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{a}^2} \left[\left(\mu_3 + \frac{\mu_4}{8} \mathbf{a}^2 \right) \mathbf{p} \right]$$
(5-14)

及其初值条件

$$p(a,t|a_0,t_0) \rightarrow \delta(a-a_0), t \rightarrow t_0$$
 (5-15)

其中 $p(a,t|a_0,t_0)$ 为扩散过程 a(t)的转移概率密度函数。而扩散过程 a(t)的不变测度为其平稳概率密度函数 $p_s(a)$,该函数为下面退化 PPK 方程的解。

$$-\frac{\partial}{\partial a}\left\{\left[\left(\mu_{1}+\frac{\mu_{2}}{8}\right)a+\frac{\mu_{1}}{a}\right]p\right\}+\frac{1}{2}\frac{\partial^{2}}{\partial a^{2}}\left[\left(\mu_{3}+\frac{\mu_{4}}{8}a^{2}\right)p\right]=0 \tag{5-16}$$

通过计算可得

$$p_s(\alpha) = 8\sqrt{\frac{2}{\pi}}2^{-3v}\mu_3^{2-v}\left(\frac{\mu_c}{\mu_3}\right)^{\frac{3}{2}}\Gamma(2-v)\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}-v\right)\right)^{-1}\alpha^2(\mu_a\alpha^2+8\mu_3)^{v-2}$$
. (5-17)

其中 υ 及伽玛函数 Γ(x)分别为

$$v = \frac{8\mu_1 + \mu_2}{tt_*}$$
, $\Gamma(x) = \int_0^x t^{x-1} e^{-1} dt$

分析平稳概率密度函數 $p_a(a)$ 在不同参數下的形态, $p_a(a)$ 中涉及參數有 $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$,由前面的假设可知: $\mu_1 < 0, \mu_3 > 0, \mu_2 > \mu_4 > 0$ 。

根据 Namachivaya 的理论,不变测度的极值包含非线性随机系统稳态行为的"最本质"的信

息,即包含了非核性簡相均力系統的稳态特征信息。当場声的强度趋于零时, $p_a(a)$ 的极值趋近于表現确定系统的稳态行为。 若系统响应a(i)为週历的过程,根据 Owelodes 的適历理论,n(a)亦的"现分其生物的全本 中的磁量均均面时间的修费,

若 $p_n(a)$ 在 a^* 取得极大值,则轨线在 a^* 处(邻城)内停留时间较长,即 a^* 为以概率意义 为稳定的。极小值的情况恰好相反。

下面计算系统的最大可能振畅 a^* ,即要求 $p_a(a^*)$ 应为 $p_a(a)$ 的极大值、从而有

$$\frac{\mathrm{d}p_{\kappa}(a)}{\mathrm{d}a} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}^{2}p_{\kappa}(a)}{\mathrm{d}a^{2}} = 0$$

可以计算出

$$a = 0$$
 $\Re a = \hat{a} = \sqrt{\frac{-8\mu_3}{8\mu_1 + \mu_2 - \mu_4}} \left(B \frac{8\mu_1 + \mu_2}{\mu_4} < \frac{1}{2} \right)$

进一步计算得到

$$\begin{split} \left. \frac{d^{2}p_{\sigma}(\alpha)}{d\alpha^{2}} \right|_{\alpha=0} &= 2^{1+3(8p_{1}+p_{2}-4p_{1})p_{1}^{-1}} \mu_{3}^{2+(8p_{1}+p_{2}-4p_{1})p_{1}^{-1}} > 0 \\ \left. \frac{d^{2}p_{\sigma}(\alpha)}{d\alpha^{2}} \right|_{\alpha=0} &= \frac{(8\mu_{1}+\mu_{2}-\mu_{4})^{2} \left(8\mu_{2} - \frac{8\mu_{3}\mu_{4}}{8\mu_{1}+\mu_{2}-\mu_{4}} \right)^{\frac{8p_{1}+p_{2}}{p_{4}}} \\ &- 16\mu_{3}^{1}(8\mu_{1}+\mu_{2}-2\mu_{4})^{2} \right. < 0 \end{split}$$

所以要求的 a* = ā-

在 a = 0 处 $p_a(a)$ 应取得极小值,这说明系统经随机激励后,在原平衡点处几乎肯定不稳定,与前文分析边界所得的结论完全一致。

而在 $a = \bar{a}$ 处 $p_*(a)$ 取得极大值,即原非线性随机动力系统产生随机 Hopf 分岔:

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{-8\mu_3}{8\mu_1 + \mu_2 - \mu_4} (\text{Im } a = \tilde{a})$$
 (5-18)

着在相空间中加以绘制,则会出现最大可能意义下的一个"颜色最深"的极限环。

根据前面对系统中参数的要求,取如下数值绘制 $p_a(a)$ 的图形。

条件 1
$$\mu_1 = -0.4$$
, $\mu_2 = 3$, $\mu_3 = 0.05$, $\mu_4 = 2.4$

条件 2
$$\mu_1 = -0.4$$
, $\mu_2 = 3$, $\mu_3 = 0.1$, $\mu_4 = 2.4$

条件 3
$$\mu_1 = -0.4$$
, $\mu_2 = 3$, $\mu_3 = 0.15$, $\mu_4 = 2.4$

条件 4
$$\mu_1 = -0.4$$
, $\mu_2 = 3$, $\mu_3 = 0.2$, $\mu_4 = 2.4$

图 5-1 中曲线从左至右依次为条件 1、条件 2、条件 3、条件 4 对应的曲线。而通过不变满度计算出的概率意义上的随机 Hopf 分岔值(\bar{a})及 $p_x(\bar{a}$)如下表 5-2 所示。

表 5-2 随机 Hopf 分岔值

参数值	条件 L	条件 2	条件3	条件4
a = ā	0.392 232	0.554 700	0.679 366	0.784 465
p _a (ā)	0.887 301	0.627 417	0.512 284	0.443 651

这里要考虑的问题是,在系统中的随机撤励作用显著增大时,随机动力系统的性态是怎样

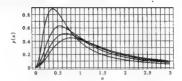


图 5-1 $\mu_1 = -0.4$, $\mu_2 = 3$, $\mu_4 = 2.4$, $\mu_3 = 0.05$, 0.1, 0.15, 0.2 时 油 法概象保守函数 及 随机 Head 分分位者

的变化趋势。可以考慮增大 μ_3 (因 $\mu_3 = \frac{1}{2} (k_{10}^2 + k_{20}^2 + r_1^2 + r_2^2)$) 的值。并观察系统的不变测度的变化情况。

图 5-2 中曲线从左至右依次为条件 1.条件 2.条件 3.条件 4 对应的曲线。而通过不变测度计算出的概率意义上的随机 Hopf 分估值(\bar{a})及 $p_a(\bar{a})$ 如下表 5-3 所示。在 $\mu_1 = -0.4$, $\mu_2 = 3$, $\mu_a = 2.4$ 的前提下, $\mu_3 = 1,1.333$, 1.666, 1.999 6。

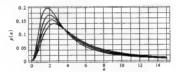


图 5-2 $\mu_1 = -0.4, \mu_2 = 3, \mu_4 = 2.4, \mu_3 = 1, 1.333, 1.666, 1.999 6 时 稳态概率密度函数及随机 Hopf 分岔位置$

接 5-3 離机 Hoof 分岔值

参数值	μ ₂ = l	μ ₃ = 1.333	$\mu_3 = 1.666$	μ ₃ = 1.999 6
a = â	1.754 12	2 025 38	2 264 37	2 480 45
p _a (â)	0 198 407	0.171 834	0.153 697	0.140 309

可以看出,该图形象地说明用不变测度理论得到的结论是正确的,并对以概率意义上产生的随机 Hoof 分岔作出了形象说明。

值得提出的问题是使用原始系统中系数的计算髓机 Bopf 分岔。在此前所举计算实例中 管侧机平均后的系统计算,在实际问题中若已知的是原始参数,则需通过相应的计算得到随 机系统中的条项编章数。

例如:系统式(5-4)中的系數取值为

$$\varepsilon=0.8$$
 , $a=0.6$, $b=0.5$, $a=0.4$, $\beta=0.1$, $\alpha_1=0.6$, $\beta_1=0.3$, $\alpha_2=0.6$, $\beta_2=0.1$ 则可计值得到

$$\mu_1 = -0.476923$$
, $\mu_2 = 2.88$, $\mu_3 = 0.442147$, $\mu_4 = 2.88$, $\mu_5 = \mu_6 = 0$

$$v = \frac{8\mu_1 + \mu_2}{\mu_1} = -0.324786 < \frac{1}{2}$$

并得到相应的稳态概率密度函数

$$p(a) = \frac{32.567a^2}{(3.537.17 + 2.88a^2)^{2.56\%}}$$

而且有 ã = 0.960 531,如图 5-3 所示。

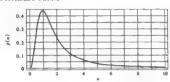


图 5-3 $\mu_1 = -0.476$ 923, $\mu_2 = 2.88$, $\mu_3 = 0.442$ 147, $\mu_4 = 2.88$, $\mu_2 = \mu_6 = 0$ 时 独态概率密度函数及随机 Hoof 分岔位置

線上所述,v 可視为随机系统稳定性的分岔参数(也可称为稳定性的偶值);而 μ ,可视为随机系统的随机 Hopf 分岔的参数。随着 $\mu_3 > 0$ 时,就可能产生以概率意义的随机 Hopf 分岔,而且分岔的位置随着 α ,的增大而增大,但其出现分岔的概率密度却在减小。

由于隨机因素的扰动是不可避免的,所以原确定系统的平衡点的稳定性转化为随机动力系统在平衡点附近是否产生 Hopf 分仓。产生限例 Hopf 分仓的位置随着 μ , 的增大而增大(发生源移),若分仓位置达到了赤潮发生的阈值,则有可能(可能性的大小为发生 Hopf 分仓的概率值。见图 5-1、图 5-2、图 5-3)引发赤潮。若随机动力系统投有可能产生随机 Hopf 分仓,且边界。 $+ \infty$ 为吸引自然边界,则说明在概率愈义上两种高炎的浓度(至少有一个)在一段时间内会急演增大,即边明可能会导致赤潮暴发。

5.1.5 非线性随机动力系统的 Lyapunov 指數

计算随机动力系统的 Lyapunov 指數是研究其稳定性的重要方法之一。而对于多种群亦潮 籌券、非线性随机动力系统的平均振幅 a(t)为一个一维 Markov 扩散过程,即

$$da = m_a dt + \sigma_{11} dW_a$$

将其改写为

$$da = \left[\left(\mu_1 + \frac{\mu_2}{8} \right) a + \frac{\mu_2}{a} \right] dt + \left(\mu_3 + \frac{\mu_4}{8} a^2 \right)^{\frac{1}{2}} dW_a$$

$$d\theta = \left(\frac{\mu_3}{a^3} + \frac{\mu_2 - \mu_4}{16} \right)^{\frac{1}{2}} dW_a$$
(5-19)

其中 W_s(t)、W_s(t)为相互独立的标准 Wiener 过程。且

$$\begin{split} \mu_1 &= \frac{1}{2} \left(\left(a_1 + a_2 \right), \quad \mu_2 = 5 k_{11}^2 + 5 k_{22}^2 + 3 k_{12}^2 + 3 k_{23}^2 + 6 k_{11} k_{23} - 2 k_{11} k_{22} \right. \\ \mu_3 &= \frac{1}{2} \left(k_{10}^2 + k_{20}^2 + r_1^2 + r_2^2 \right), \quad \mu_4 = 3 k_{11}^2 + 3 k_{22}^2 + k_{12}^2 + k_{23}^2 + 2 k_{12} k_{23} + 2 k_{11} k_{22} \right. \end{split}$$

对于确定系统、平衡点 Q,附近的稳定性取决于 $a > \beta$ 且 $b > \alpha$ 是否成立。而对于随机系统、则可以通过计算 Lyapunov 指数分析系统(5-9)在 a = 0 的稳定性。

对平均振幅扩散过程 a(1),设

$$a(t) = e^{\rho}, \rho = \rho(a)$$

所以,由 Ito 随机微分法则可得

$$d\rho = \frac{\partial c}{\partial a} da + \frac{\partial c}{\partial t} ds + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial a^2} \sigma_{ii}^a ds$$

$$= \frac{1}{a} \left(\left[\left(\mu_i + \frac{\rho_i}{8} \right) a + \frac{\mu_2}{a} \right] dt + \left(\mu_2 + \frac{\rho_4}{8} a^2 \right)^{\frac{1}{2}} dW_a \right) + \frac{1}{2} \frac{(-1)}{a^2} \left(\mu_3 + \frac{\mu_4}{8} a^3 \right) dt$$

$$= \left(\mu_i + \frac{\mu_1}{8} - \frac{\rho_4}{68} + \frac{\mu_3}{68} \right) dt + \frac{1}{a} \left(\mu_3 + \frac{\mu_4}{8} a^3 \right)^{\frac{1}{2}} dW_a$$
(5.20)

敗均信可得

$$d\rho = \left(\mu_1 + \frac{\mu_2}{8} - \frac{\mu_4}{16} + E\left(\frac{\mu_3}{2a^2}\right)\right) dt \triangleq v dt$$
 (5-21)

下面讨论系统在 a=0 处的稳定性。

当 $\mu_3 = 0$ 时, a(t)在 $a \approx 0$ 处的 Lyapunov 指数为

$$\lambda = v = \mu_1 + \frac{\mu_2}{8} - \frac{\mu_4}{16} \tag{5-22}$$

当 $\frac{8\mu_1 + \mu_2}{\mu_1} < \frac{1}{2}$ 时,得 $\lambda < 0$,随机系统在 $\alpha = 0$ 处为以概率意义稳定的;

当
$$\frac{8\mu_1 + \mu_2}{\mu_4} > \frac{1}{2}$$
时,得 $\lambda > 0$,随机系统在 $\alpha = 0$ 处为以概率意义不稳定的;

而
$$\frac{8\mu_1 + \mu_2}{\mu_4} = \frac{1}{2}$$
为随机系统在 $\alpha = 0$ 处稳定与否的分岔值。

系统的随机分岔参数可由 $\lambda=0$ 确定。即有 $\mu_1+\frac{\mu_2}{8}-\frac{\mu_4}{16}=0$,这与上节中由一维扩散过程 边界理论所确定的分岔参数 $\frac{3\mu_1+\mu_2}{2}=\frac{1}{2}$ 完全一致。

通过分岔參數关系图 5-4 可以看出。当系數 μ_1, μ_2, μ_4 确定的参數 v<0,此时 μ_4 在曲面的上方,且 $\mu_4>16\mu_1+2\mu_2$ 时,系统在 $\alpha=0$ 处为以概率意义稳定的;反之当 $\mu_4<16\mu_1+2\mu_2$ 时,系统在 $\alpha=0$ 处为以概率意义不稳定的

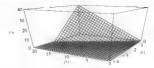


图 5-4 系统稳定性分岔参数关系图

当 $\mu_1 \neq 0$ 时, a(t) 在 $a \neq 0$ 处的 Lyapunov 指數为 $\lambda > 0$ (因为 $\mu_1 > 0$), 所以隨机系统在 a = 0 处为以概率意义不稳定的。

综合前面各节内容可以得出; 讨论随机系统式(5-9) 在 a=0 处的稳定性时, 所采用的一排改择边界理论, 不变测度极值理论和 1, apunov 指数理论 : 种力法, 得到的结论完全一般。

5.1.6 随机平均系统的稳态响应的概率密度函数

在第 4.5 节中所讨论的平均振幅是作为一个一维扩散过程进行的一本节要将所讨论的非数据机动力系统经随组平均从处理证明的平均振幅上平均角度 $(a(t), \theta(t))$ 视为一个二维 $(a(t), \theta(t))$ 就

对干酪机动力系统

$$\begin{array}{l} x_1 = a_1 x_1 - a_{11} x_1^2 - a_{12} x_1^2 + (k_{10} + k_1 x_1 + k_{12} x_2) \xi(t) + r_1 \eta(t) \\ x_2 = a_2 x_1 - a_{21} x_1 x_2 - a_{22} x_1^2 + (k_{20} + k_{21} x_1 + k_{22} x_2) \xi(t) + r_2 \eta(t) \end{array}$$

$$(5-23)$$

记平均后得到系统

$$da = m_a dt + \sigma_{11} dW_a + \sigma_{22} dW_d$$

$$d\theta = m_a dt + \sigma_{11} dW_c + \sigma_{22} dW_d$$
(5-24)

其中 W_s(t)、W_s(t)为相互独立的标准 Wiener 过程。

对于:维扩散过程,通常要考虑计算其:维转移概率密度函数 对于一般情况下计算二维转移概率密度函数前没有最适的方法 此处所得到的系统可以采用一些技巧进行计算。 在(5.24)的各项条数数。

$$\begin{split} & \sigma_{11}^{2} = \frac{a^{2}}{6}(3k_{11}^{2} + 3k_{22}^{2} + k_{11}^{2} + k_{21}^{2} + 2k_{11}k_{21} + 2k_{11}k_{22}) + \frac{1}{2}(k_{10}^{2} + k_{20}^{2} + r_{11}^{2} + r_{22}^{2}) \\ & \sigma_{11}^{2} = \sigma_{31}^{2} = \frac{a}{4}(k_{11} + k_{21})(k_{21} - k_{12}) \\ & \sigma_{12}^{2} = \frac{1}{8}(k_{11}^{2} + k_{22}^{2} + 3k_{11}^{2} + 3k_{21}^{2} - 2k_{11}k_{22} + 2k_{11}k_{21}) + \frac{1}{2}a^{3}(k_{10}^{2} + k_{20}^{2} + r_{11}^{2} + r_{22}^{2}) \\ & m_{1} = \frac{a}{3}(a_{11} + a_{22}) + \frac{a}{9}(5k_{11}^{2} + 5k_{22}^{2} + 3k_{11}^{2} + 3k_{21}^{2} + 3k_{11}^{2} + 6k_{11}k_{21} - 2k_{11}k_{21}) + \frac{a}{3}(k_{11}^{2} + k_{22}^{2} + 3k_{11}^{2} + 3k_{21}^{2} + 3k_{11}^{2} + 6k_{11}k_{21} - 2k_{11}k_{21}) + \frac{a}{3}(k_{11}^{2} + k_{22}^{2} + 3k_{11}^{2} + 3k_{11}^{2} + 6k_{11}k_{21} - 2k_{11}k_{21}) + \frac{a}{3}(k_{11}^{2} + k_{22}^{2} + 3k_{11}^{2} + 3k_{11}^{2} + 3k_{11}^{2} + 6k_{11}k_{21} - 2k_{11}k_{21}) + \frac{a}{3}(k_{11}^{2} + k_{22}^{2} + 3k_{11}^{2} + 3k_{11}^{2} + 3k_{11}^{2} + 6k_{11}k_{21} - 2k_{11}k_{21} - 2k_{11}k_{$$

$$\frac{1}{2a}(k_{10}^2 + k_{20}^2 + r_1^2 + r_2^2)$$

 $n_a = 0$

进一步设

$$\begin{split} &\mu_1 = \frac{1}{2} \left(a_1 + a_2 \right), \quad \mu_2 = 5 k_{11}^2 + 5 k_{22}^2 + 3 k_{12}^2 + 3 k_{21}^2 + 6 k_{21} k_{21} - 2 k_{11} k_{22} \right. \\ &\mu_1 = \frac{1}{2} \left(k_{12}^2 + k_{22}^2 + r_1^2 + r_2^2 \right), \quad \mu_4 = 3 k_{11}^2 + 3 k_{22}^2 + k_{12}^2 + k_{21}^2 + 2 k_{12} k_{21} + 2 k_{11} k_{22} \right. \\ &\mu_5 = \frac{1}{4} \left(k_{11} + k_{21} \right) \left(k_{11} - k_{11} \right), \quad \mu_4 = k_{11}^2 + k_{22}^2 + 3 k_{12}^2 + 3 k_{21}^2 + 2 k_{12} k_{21} - 2 k_{11} k_{22} \right. \end{split}$$

下面研究当 $\sigma_{22}^{2} = \sigma_{21}^{2} \neq 0$ 时,式(5-24)改写为

$$da \simeq \left[\left(\mu_1 + \frac{\mu_2}{8}\right)a + \frac{\mu_2}{a}\right]di + \left(\mu_2 + \frac{\mu_4}{8}a^2\right)^{\frac{1}{2}}dW_a + (a\mu_2)^{\frac{1}{2}}dW_\theta$$

 $d\theta \simeq (a\mu_2)^{\frac{1}{2}}dW_a + \left(\frac{\mu_2}{c_2} + \frac{\mu_4}{16}\right)^{\frac{1}{2}}dW_\theta$
(5-25)

设系统响应的概率密度函数为 $P(a,\theta,t|a_0,\theta_0,t_0)$,而所关注的是稳态响应的概率密度 设 $\lim_{\epsilon} P(a,\theta,t|a_0,\theta_0,t_0) = Q(a,\theta)$,则稳态概率密度函数 $Q(a,\varphi)$ 满足如下方程;

$$\frac{\partial (m_a Q)}{\partial a} + \frac{\partial (m_\theta Q)}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 (\sigma_{11}^2 Q)}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 (\sigma_{12}^2 Q)}{\partial a \partial \theta} + \frac{\partial^2 (\sigma_{22}^2 Q)}{\partial \theta^2} \right]$$
(5-26)

相应地有

$$\frac{\partial \left(\left(\left(\mu_{1} + \frac{\mu_{2}}{8}\right)a + \frac{\mu_{2}}{a}\right)Q\right)}{\partial a} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^{2}\left(\left(\mu_{1} + \frac{\mu_{1}}{8}a^{2}\right)Q\right)}{\partial a^{2}} + \frac{\partial^{2}\left(a\mu_{2}Q\right)}{\partial a\partial \theta} + \frac{\partial^{2}\left(\left(\frac{\mu_{2}}{a^{2}} + \frac{\mu_{1}}{16}\right)Q\right)}{\partial \theta^{2}}\right]\right]}{\partial \theta^{2}}$$
(5.27)

设有参数 y 使得下列等式成立:

$$\frac{\partial}{\partial a} \left[\left(\left(\mu_1 + \frac{\mu_2}{8} \right) a + \frac{\mu_3}{a} \right) Q - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a} \left(\left(\mu_3 + \frac{\mu_4}{8} a^2 \right) Q \right) - \gamma \frac{\partial (a \mu_3 Q)}{\partial \theta} \right] \\
= -\frac{\partial}{\partial \theta} \left[-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\left(\frac{\mu_3}{2} + \frac{\mu_4}{16} \right) Q \right) + (\gamma - 1) \frac{\partial (a \mu_3 Q)}{\partial \theta} \right]$$
(5.28)

进一步假设

$$\left\{ \left(\mu_1 + \frac{\mu_2}{8} \right) a + \frac{\mu_3}{a} \right\} Q - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a} \left(\left(\mu_3 + \frac{\mu_4}{8} a^2 \right) Q \right) - \gamma \frac{\partial \left(a \mu_5 Q \right)}{\partial \theta} = 0$$
 (5-29)

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\left(\frac{\mu_3}{a^2} + \frac{\mu_6}{16}\right)Q\right) + (\gamma - 1)\frac{\partial(a\mu_5Q)}{\partial a} = 0 \tag{5-30}$$

并设 $Q(a,\theta) = \exp(u(a,\theta))$,代人上面二式后,可求得

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\left[\left(\mu_1 + \frac{\mu_1}{8} - \frac{\mu_4}{8} \right) a^2 + \mu_3 \right] \left(\frac{\mu_6}{8a} + \frac{2\mu_3}{a^2} \right) - 4a\gamma(\gamma - 1) \mu_3^2}{4a^4 \gamma(\gamma - 1) \mu_3^4 + \left(\mu_3 + \frac{\mu_4}{8a} a^2 \right) \left(\frac{\mu_3}{a^2} + \frac{\mu_6}{16} \right)}$$
(5-31)

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{(\gamma - 1) a \mu_5 \left[4 \left(\mu_1 + \frac{\mu_2}{8} \right) a + \frac{4 \mu_3}{a} - \frac{a \mu_4}{2} \right] + 2 (\gamma - 1) \left(\mu_3 + \frac{\mu_4}{8} a^2 \right) \mu_5}{4 a^4 \gamma (\gamma - 1) \mu_5^4 + \left(\mu_3 + \frac{\mu_8}{8} a^2 \right) \left(\frac{\mu_3}{a^2} + \frac{\mu_6}{16} \right)}$$
(5-32)

利用可积性条件,令

$$\frac{\partial^2 u}{\partial u^{2d}} = \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial u}$$

則可得 γ=1。

进而求得

$$u(a,\theta) = \ln a^2 + \frac{1}{2} (8\mu_1 + \mu_2 - 2\mu_4) \mu_4^{-1} \ln(\mu_4 a^2 + 8\mu_3) + c_1$$
 (5-33)

剛有

$$Q(\alpha, \theta) = \exp(u(\alpha, \theta))$$

= $c_2 \exp\left[\ln \alpha^2 + \frac{1}{2}(8\mu_1 + \mu_2 - 2\mu_4)\mu_4^{-1}\ln(\mu_4 \alpha^2 + 8\mu_3)\right]$ (5-34)

由归一化条件,计算出 63.则可得到

$$Q(a,\theta) = 8\sqrt{\frac{2}{\pi}} 2^{-3\tau} \mu_3^{2-\tau} \left(\frac{\mu_4}{\mu_3}\right)^{\frac{3}{2}} \Gamma(2-v) \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}-v\right)\right)^{-\tau} a^2 (\mu_4 a^2 + 8\mu_3)^{\tau-2}$$
 (5-35)

其中 » 及伽玛函数 Γ(z)分别为

$$v = \frac{8\mu_1 + \mu_2}{\mu_4}$$
, $\Gamma(\pi) = \int_0^{\pi} i^{x-1} e^{-i} di$

结果发现所得到的二维 Markov 过程 $(a(t), \theta(t))$ 的稳态响应的概率密度为平均振幅 a(t) 的高数,而与平均崩度量 $\theta(t)$ 无关。其际因为原限机动力系统的随机激励为相互独立 的零均值标准 Gause 白塘点,在经过随机平均法后,得到的随机激励分相互独立的标准 Wiener过程。而平均系统的条项系数已完全与 $\theta(t)$ 无关($m_*, m_* o(t_*, o_{1}, o_{2}, o_{3})$ 营 齐含 θ)。

下面圖明平幾個塞密度函數基如何反映隨机动力系统的隨机 Head 分分的。

由二维 Markov 过程(a(t), $\theta(t)$)的雜基响应的概率密度 $Q(a,\theta)$ 可以得到在隨机平均意义下的二维过程($x_1(t), x_2(t)$)的雜基响应的概率密度、 $(x_1(t), x_2(t))$ 可視为原系统式(5-23)的确应过程,即 $a(t) = (X_1^2(t) + X_2^2(t))^{\frac{1}{2}}$ 。所以($X_1(t), X_2(t)$)的雜基响应的概率密度函数为

$$\begin{split} P(x_1, x_2) &= Q(\alpha, \theta) \\ &= 8\sqrt{\frac{2}{\pi}} 2^{-3s} \mu_3^{2-s} \left(\frac{\mu_4}{\mu_3}\right)^{\frac{3}{2}} \Gamma(2-v) \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}-v\right)\right)^{-1} (x_1^2 + x_2^2) \left[\mu_4(x_1^2 + x_2^2) + 8\mu_3\right]^{s-2} \end{split}$$

选取如下参數绘制二维稳态响应的概率密度函数 $P(z_1, z_2)$ 图形,如图 5-5、图 5-6、图 5-7 所示。

条件1
$$\mu_1 = -0.4$$
, $\mu_2 = 3$, $\mu_3 = 0.05$, $\mu_4 = 2.4$
条件2 $\mu_1 = -0.4$, $\mu_2 = 3$, $\mu_3 = 0.1$, $\mu_4 = 2.4$

条件 3
$$\mu_1 = -0.4$$
, $\mu_2 = 3$, $\mu_3 = 0.2$, $\mu_4 = 2.4$

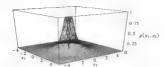


图 5-5 在 $\mu_1 = -0.4$, $\mu_2 = 3$, $\mu_3 = 0.05$, $\mu_4 = 2.4$ 时 稳态响应的概率密度函数

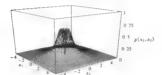


图 5-6 在 $\mu_1 = -0.4, \mu_2 = 3, \mu_3 = 0.1, \mu_4 = 2.4$ 时 稳态响应的概率密度函数

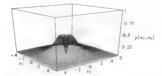


图 5-7 在 $\mu_1 = -0.4$, $\mu_2 = 3$, $\mu_3 = 0.2$, $\mu_4 = 2.4$ 时 檢查响応的概率密度函数

从以上图形中可以清楚她看到,在原平衡点附近会产生随机 Hopf 分岔。图中的峰值与数值模拟得到的结果是基本对应吻合的。

在原系统中取一组实际参数值计算相应的各类参数值。

议 $\varepsilon=0.8$, $\alpha=0.6$, b=0.5, $\alpha=0.4$, $\beta=0.1$, $\alpha_1=0.6$, $\beta_1=0.3$, $\alpha_2=0.6$, $\beta_2=0.1$ 原系统为

$$\frac{dP_1}{dt} = 0.8P_1 - 0.6P_1^2 - 0.4P_1P_2 + 0.6P_1\xi(t) + 0.3\eta(t)$$

$$\frac{dP_2}{dt} = 0.8P_2 - 0.5P_1P_2 - 0.1P_2^2 + 0.6P_1\xi(t) + 0.1\eta(t)$$
(5-37)

刚可计算得到在平衡占外的推动方程为

$$x_1 = 0.8x - 0.52x^2 - 2x_1^2 + (0.923\ 077 + 0.6x_1)\xi(t) + 0.166\ 667\eta(t)$$

$$x_2 = -0.153\ 846x_1 - 0.62x_1x_1 + 1.9x_1^2 + 0.6x_2\xi(t) - 0.066\ 667\eta(t)$$
(5-38)

讲而可得到

$$\mu_1=-0.476$$
 923, $\mu_2=2.88$, $\mu_3=0.442$ 147, $\mu_4=2.88$, $\mu_5=\mu_6=0$ 日相原地语

$$m_a = \frac{0.442\ 147}{a} - 0.116\ 923 a$$
, $m_\theta = 0$

经过随机平均后得到平均振幅与平均角度的随机系统(a(x), $\theta(x)$)为

$$da = \begin{bmatrix} 0.442 & 147 & -0.116 & 923 & a \end{bmatrix} dt + (0.447 & 214 & 7 + 0.36 & a^2) & dW_a \\ d\theta = & 0.664 & 941 \\ dW_a \end{bmatrix}$$
(5-39)

绘制系统式(5-39) 。维的稳态响应的概率密度函数的图形,如图 5-8 所示



图 5-8 在 $\mu_1 = -0.476923$, $\mu_2 = 2.88$, $\mu_3 = 0.442147$, $\mu_4 = 2.88$, $\mu_5 = \mu_6 = 0$ 総态响应的概率密度函数

5.1.7 非线性随机动力系统随机平均后的数字模拟

由随机动力系统式(5.4)得到如下二维随机动力系统:

$$x_1 = a_1 x_1 - a_2 x_1^2 - a_2 x_2^2 + (k_{10} + k_{11} x_1 + k_2 x_2) \xi(t) + r_1 \eta(t)$$

$$x_2 = a_2 x_2 - a_{21} x_1 x_2 - a_{22} x_1^2 + (k_{20} + k_{21} x_1 + k_{22} x_2) \xi(t) + r_1 \eta(t)$$
(5.40)

作如下坐标变换:

$$z_1 = a\cos\theta$$
, $z_2 = a\sin\theta$
对系统式(5-40)进行变量代换,可得

$$\begin{split} \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= -a^2 \left[\ a_{:1} \cos^3\theta + (a_{:2} + a_{:2}) \cos\theta \sin^3\theta + a_{:2} \sin^3\theta \right] + a \left(a_{:1} \cos^2\theta + a_{:2} \sin^2\theta \right) + \\ \left[\ k_{:B} \cos\theta + k_{:B} \sin\theta + a \left(k_{:1} \cos^3\theta + (k_{:2} + k_{:2}) \cos\theta \sin\theta + k_{:2} \sin^3\theta \right) \right] \xi(t) + \\ \left(r_1 \cos\theta + r_2 \sin\theta \right) \eta(t) \end{split}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} &= (a_2 - a_1) \cos\theta \sin\theta + a \left[a_{:2} \sin^3\theta - a_{:2} \cos\theta \sin^2\theta + (a_{:1} - a_{:2}) \cos^2\theta \sin\theta \right] + \\ \left[\ k_{:2} \cos^2\theta + (k_{:2} - k_{:1}) \cos\theta \sin\theta - k_{:2} \sin^3\theta + \frac{1}{a} \left(k_{:B} \cos\theta - k_{:B} \sin\theta \right) \right] \xi(t) + \\ \frac{1}{a} \left(r_1 \cos\theta - r_1 \sin\theta \right) \eta(t) \end{split}$$

(5.41) 当系统所受到的随机激励白噪声过程的强度充分小时,根据 Khasminskii 极限定理可知, 系统式(5-40)的响应过程 { a(t), b(t)] 到收敛于一个二维 Markov 扩散过程。对系统式(5-41) 应用随机平均均可强到加下扩散分配(ho随机部分方层)。

$$da = m_s dt + \sigma_{11} dW_s + \sigma_{12} dW_\theta$$

$$d\theta = m_\theta dt + \sigma_{21} dW_\theta + \sigma_{22} dW_\theta$$
(5-43)

其中 $\begin{bmatrix} m_e \\ m_e \end{bmatrix}$ 为順移系数向量、 $\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{\alpha} \\ \sigma_{21} & \sigma_{\alpha} \end{bmatrix}$ 是扩散系数矩阵, $\Psi_e(z)$ 、 $\Psi_g(z)$ 为相互独立的 Wiener 过程。

系统式(5-43)的各项系数为

$$\begin{split} m_{a} &= \frac{a}{2} \left(a_{1} + a_{2} \right) + \frac{a}{8} \left(5k_{11}^{2} + 5k_{12}^{2} + 3k_{11}^{2} + 3k_{11}^{2} + 6k_{11}k_{11} - 2k_{11}k_{12} \right) + \\ & \frac{1}{2a} \left(k_{12}^{2} + k_{22}^{2} + r_{1}^{2} + r_{2}^{2} \right) \\ m_{q} &= 0 \\ \sigma_{11}^{2} &= \frac{a^{2}}{8} \left(3k_{11}^{2} + 3k_{22}^{2} + k_{11}^{2} + k_{21}^{2} + 2k_{11}k_{21} + 2k_{11}k_{21} \right) + \frac{1}{2} \left(k_{12}^{2} + k_{22}^{2} + r_{1}^{2} + r_{1}^{2} \right) \\ \sigma_{12}^{2} &= \sigma_{21}^{2} &= \frac{a}{4} \left(k_{11} + k_{21} \right) \left(k_{20} - k_{20} \right) \\ \sigma_{22}^{2} &= \frac{1}{2} \left(k_{11}^{2} + k_{22}^{2} + 3k_{22}^{2} + 3k_{22}^{2} - 2k_{21}k_{21} - k_{11}k_{21} \right) + \frac{1}{3} \left(k_{20}^{2} + k_{20}^{2} + r_{1}^{2} + r_{1}^{2} \right) \end{split}$$

对以上系数进行整合。引入参量 μ , $i=1,2,\cdots,6$, 可将系统化为

$$da = \left[\left\{ \mu_1 + \frac{\mu_2}{8} \right\} a + \frac{\mu_2}{a} \right] dt + \left\{ \mu_2 + \frac{\mu_4}{8} a^2 \right\}^{\frac{1}{2}} dW_a + (a\mu_2)^{\frac{1}{2}} dW_\theta$$

$$d\theta = (a\mu_2)^{\frac{1}{2}} dW_a + \left(\frac{\mu_2}{a^2} + \frac{\mu_4}{6} \right)^{\frac{1}{2}} dW_\theta$$
(5-43)

由前面的假设可知,各项系数应满足如下条件:

田間園的被权可知,在多次次进病足如下来打 $\mu_1 < 0, \quad \mu_3 > 0, \quad \mu_6 > 0, \quad \mu_2 > \mu_4 > 0$

所以由式(5-43)中扩散系数矩阵的情况可知当 $\sigma_{12}^2=\sigma_{21}^2=0$ 时,即 $\mu_1=0$ ($k_2=k_{12}=0$)因为结合第1,2节可知, $k_{11}+k_{21}=0$ 可不予考虑)时,平均振幅a(t)为一个一维 Markov 扩散过程。

在模拟时应分成 $\mu_s = 0$ 与 $\mu_s \neq 0$ 两种情况进行。

1.当 44=0 时

可设 $k_{2i} - k_{12} = 0$,则有 $\mu_6 = \frac{\mu_2 - \mu_4}{2}$ 并将式(5-43)写为

$$da = \left[\left(\mu_1 + \frac{\mu_2}{8} \right) a + \frac{\mu_1}{a} \right] dt + \left(\mu_1 + \frac{\mu_4}{8} a^2 \right)^{\frac{5}{2}} dW_e$$

$$d\theta = \left(\frac{\mu_3}{a^2} + \frac{\mu_2 - \mu_4}{32} \right)^{\frac{1}{2}} dW_\theta$$
(5-44)

对于原始系统式(5-4)中的系数取为

 $\varepsilon=0.8$, a=0.6 , b=0.5 , a=0.4 , $\beta=0.1$, $a_1=0.6$, $\beta=0.3$, $a_2=0.6$, $\beta_2=0.1$ 제한 단事機能하

 $\mu = -0.476923, \mu_1 = 2.88, \mu_1 = 0.442147, \mu_4 = 2.88, \mu_5 = \mu_6 = 0$

选取的初值为 $a_0 = 0.1$, $\theta_0 = 0$ 在计算数值时,考虑到实际情况将时间间隔取为 r = 0.5 d, 在绘制图形时专察 100 d 和 300 d 件 为 个观察分析时间区间

応用隨机增維精细积分法进行数字模拟 绘制 300 d 的相图如图 5-9 所示 极限坏的形状 化侧导子管 1000 d 的图形。则极限环形状明显可见,如图 5-10 所示,其时程附如图 5-11 所示。

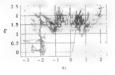


图 5-9 $\mu_1 = -0.476923$, $\mu_2 = 2.88$, $\mu_3 = 0.442147$, $\mu_4 = 2.88$, $\mu_1 - \mu_0 = 0$ 时通过平均 器額給制蓄學液度扰动相图 (某 次模拟.300 d)

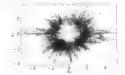


图 5-10 $\mu_1 = -0.476$ 923, $\mu_2 = 2.88$, $\mu_3 = 0$ 442 147, $\mu_4 = 2.88$, $\mu_5 = \mu_0 = 0$ 附通过平均振幅 绘制基条浓度扰动相图(某 次模拟、1 000 d)

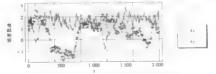


图 5-11 $\mu_1 = -0.476$ 923, $\mu_2 = 2.88$, $\mu_3 = 0.442$ 447, $\mu_4 = 2.88$, $\mu_5 = \mu_6 = 0$ 时通过 平均振幅绘制嘉类浓度扰动的时程图(某·次模拟:1000d)

2.当 2.≠0 时

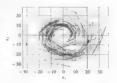
选取参数 $\mu_1 = -0.4$, $\mu_2 = 3$, $\mu_3 = 4$, $\mu_4 = 3$, $\mu_5 = 1$, $\mu_6 = 1$.

绘制相图及时程图分别如图 5-12、图 5-13 所 示。在相空间中明显出现了最大可能意义下的 个"颜色最深"的银形(带状) 由此可以看出,应 用随机增维精细积分法可以形象地侧述以概率意 义上产生的随机 Hoof 分仓。

甚想增大"可能性",只需增加观察的时间(此 处仅从理论意义看问题) 例如将时间增加到 1000 d,"颜色最深"的极限环星带状,如图 5-14 所示。

3.实际意义

通过数字模拟看到、随机动力系统所对应的状 杰在实际问题中可能还是一种动荡的正常(未暴发



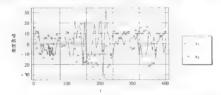


图 5-11 $\mu = -0.4$, $\mu_2 = 3$, $\mu_3 = 4$, $\mu_4 = 3$, $\mu_5 = \mu_6 = 1$ 时通过平均振幅绘制整类浓度 推动的贴程图(著一次模拟, 200 d)

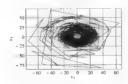


图 5-14 μ₁ = -0.4, μ₂ = 3, μ₃ = 4, μ₄ = 3, μ₅ = μ₆ = 1 財通过平均振幅绘制藤类浓度 扰动相图 (某 -次模拟,1 000 d)

确定系统模形为

赤潮)状态。对于赤潮是否发生要看集类浓度扰动后,是否超过了发生赤潮的阈值。显然,随 机搬励缺大,浓度受到的扰动越大,越可能导致赤潮发生。

5.1.8 多种群赤潮藻类非线性随机动力系统的数字模拟

对于以典观赤欄寨类——硅藤和甲寨及浮游动物为分析对象建立的三维动力系统模型, 加人随机因素(激励)后进行数字模拟,以求形象地说明赤潮动力学行为的复杂性与规律性。

$$\frac{dP_1}{dI} \approx P_1(\varepsilon_1 - a_{11}P_1 - a_{12}P_2 - a_{13}Z)$$

$$\frac{dP_2}{dI} = P_2(\varepsilon_2 - a_{22}P_1 - a_{22}P_2 - a_{23}Z)$$

$$\frac{dZ}{I} = Z(-\varepsilon_3 + a_{31}P_1 + a_{32}P_2)$$
(5-45)

受到随机因實作用,得到的隨机系统模型为

$$\frac{dP_1}{dt} = P_1(\varepsilon_1 - a_{11}P_1 - a_{22}P_2 - a_{12}Z) + h_1P_1\xi(t) + l_1\eta(t)$$

$$\frac{dP_1}{dt} = P_2(\varepsilon_2 - a_{21}P_1 - a_{22}P_2 - a_{32}Z) + h_2P_2\xi(t) + l_2\eta(t)$$

$$\frac{dZ}{dt} = Z(-\varepsilon_2 + a_{31}P_1 + a_{32}P_2) + h_2Z\xi(t) + l_3\eta(t)$$
(5.46)

其中硅藻、甲藻以及浮游动物受到乘性随机撤脂为 $\varepsilon(\iota)$ (与环境及自身浓度等内在因素有 关)、另外受到直接影响放度变化的外界随机撤崩 $\eta(\iota)$ 。为便于研究、假设 $\varepsilon(\iota)$ 与 $\eta(\iota)$ 为独立的具有零的成和标准方数0 cassa chep, 即

$$E[\xi(t)] = E[\eta(t)] = 0, \quad E[\xi(t)\xi(t+\tau)] = \delta(\tau)$$

 $E[\eta(t)\eta(t+\tau)] = \delta(\tau), \quad E[\xi(t)\eta(t+\tau)] = 0$

应用随机增维精细积分法,选取矩阵为

$$\begin{split} \boldsymbol{B}_{g} &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{1} & 0 & 0 & -a_{11}P_{1}^{2} - a_{12}P_{1}P_{2} - a_{11}P_{1}Z \\ 0 & \varepsilon_{2} & 0 & -a_{21}P_{1}P_{2} - a_{22}P_{2}^{2} - a_{22}P_{2}Z \\ 0 & 0 & -\varepsilon_{0} & a_{31}P_{1}Z + a_{22}P_{2}Z \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{B}_{g} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & h_{1}P_{1}\xi(t) + l_{1}\eta(t) \\ 0 & 0 & 0 & h_{2}P_{2}\xi(t) + l_{2}\eta(t) \\ 0 & 0 & 0 & h_{2}Z\xi(t) + l_{3}\eta(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{split}$$

对系统参数作如下设定:

 $\epsilon_i = a_a = 1$, $a_{23} = 1$, $a_{12} = 1.0$, $a_{21} = 1.5$, $a_{32} = 0.5$, $a_{13} = r$, $a_{31} = 0.5r$

并将 r 视为分岔参数。

在计算数值时, 考虑到实际情况将时间间隔取为 τ = 0.5 d, 在绘制图形时考察 100 d 作为 — 个观察分析时间区间。

通过比较受到随机撤励的系统与确定系统的相图与时程图,会看到确定系统在不同的参数取值时具有丰富的动力学行为,而相应的随机系统却会发生很大的变化。

1.确定系统模拟

①当选取的初值为: $P_1^{(0)} = 0.2$, $P_2^{(0)} = 0.6$, $Z^{(0)} = 0.03$, 而分岔参数 r = 6.0 时, 系统出现 1 环血(需长时间观察, 如时间区间取为 1 000 d, 观察效果非常好—但选取这样的时间区间显然 实际意义不大)。 其相图与时程图分别如图 5-15、图 5-16、图 5-17 所示。联系实际问题, 浓度 的命化分于 - 珅切图期海接收去, 不全有是分性槽长, 不会引发未满。

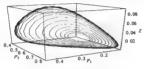


图 5-15 r = 6.0, $P_1^{(0)} = 0.2$, $P_2^{(0)} = 0.6$, $Z^{(0)} = 0$ 的 財產定系統的相限

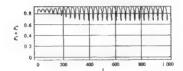


图 5-16 r = 6.0, $P_1^{(0)} = 0.2$, $P_2^{(0)} = 0.6$, $Z^{(0)} = 0.03$ 时确定系统的基类浓度和的时程图

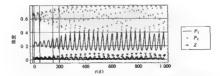


图 5-17 r=6.0, P₁⁽⁰⁾ = 0.2, P₂⁽⁰⁾ = 0.6, Z⁽⁰⁾ = 0.03 时确定系统的藻类浓度 及理難点输的密度的时程图

②当选取的初值为: $P_1^{(0)}=0.6$, $P_2^{(0)}=0.4$, $Z^{(0)}=0.12$, 而分岔参数 r=7.5 时, 系统出现 1 环面, 此次连续计算了 500 d, 使模拟出的性态效果较显著。 其相图与时程图分别如图 5-18、图 5-19、图 5-20 所示。 联系实际问题, 旅货的变化处于一种拟周期振荡状态, 不会有摹发性增长、 不合引奏处理

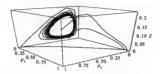


图 5-18 $r \approx 7.5$, $P_1^{(0)} = 0.6$, $P_2^{(0)} = 0.4$, $Z^{(0)} = 0.12$ 时确定系统的相图

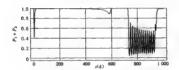


图 5-19 r=7.5, P₁⁽⁰⁾ = 0.6, P₂⁽⁰⁾ = 0.4, Z⁽⁰⁾ = 0.12 时确定系统的 基类浓度和的时程图(观察 500 d)

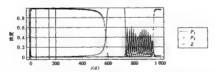
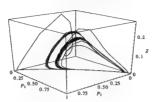


图 5-20 r=7.5, $P_1^{(6)}=0.6$, $P_2^{(6)}=0.4$, $Z^{(6)}=0.12$ 时确定系统的集类浓度及浮游动物的密度的时程图

③当选取的初值为: P₁⁽⁰⁾ = 0.6, P₂⁽⁰⁾ = 0.4, Z⁽⁰⁾ = 0.12, 而分岔参数 r = 7.8 时, 系统出现 2 环面, 成次连续计算 ∫ 1 000 d, 使赚以此的性态效果较显著。 其相图 与时程图分别如图 5-21、 图 5-22 所示。 联系实际问题, 浓度的变化处于一种拟周期振荡状态, 不会有暴发性增长, 不会引发余潮。



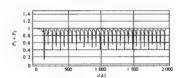


图 5-22 r=7.8, P₁^(d) = 0.6, P₂^(D) = 0.4, Z^(d) = 0.12 时确定系统的豪类浓度和的时程图

④当选取的初值为; $P_1^{(0)} = 0.6$, $P_2^{(0)} = 0.4$, $Z^{(0)} = 0.12$, 而分岔参數 r = 10 时, 系统出现 Vance's 螺旋視沌, 此次连续计算了 1 000 d. 使模拟出的性态效果较显著。其相图和时程图分别 如图 5-23, 图 5-24 所示。 联系实际问题,浓度的变化处于一种混沌状态,但囊类浓度的和是有

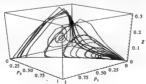


图 5-23 $r = 10, P_1^{(0)} = 0.6, P_2^{(0)} = 0.4, Z^{(0)} = 0.12$ 时确定系统的相图

界的,不会有暴发性增长,不会引发赤潮。

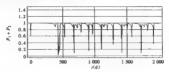


图 5-24 r = 10, P₁⁽⁰⁾ = 0.6, P₂⁽⁰⁾ = 0.4, Z⁽⁰⁾ = 0.12 耐确定系统的基本按摩和的时程图

通过对确定系统的数字模拟,发现对于不同的初始值(根限环内外管可),当分岔参数,在 适当的范围内,确定系统存在稳定的1.环面;当,增大时,系统会出现2.环面 疗,若,继续增大 时,系统会产生 Vance* 觀蒙跟他。结合以上分析,发现确定系统地2.环面 疗 通向很地(Cha-心)的道路为通有的,可推断出该确定系统通过拟制期分岔产生根地;即使该确定系统发生了 很饱,也不会导致赤獭的发生(这是对确定系统的理论分析结果)。

2. 隨机系統的模拟

在此仍然选取 r 作为分岔参数,采用随机增维精细积分法模拟随机系统式(5-38)的性态, 系统中随机激励部分的系数取为

$$h_1 = 0.3$$
, $l_1 = 12$, $h_2 = 0.5$, $l_2 = 10$, $h_3 = 1$, $l_3 = 2$

①选取分岔参数 r=6.0、初值为: $P_1^{(0)}=0.2$ 、 $P_2^{(0)}=0.6$ 、 $Z^{(0)}=0.03$ 、观察系统的相图、藻类称的时程图以负表参领的故度(密度)的时程图、如图 5-25、图 5-26、图 5-27 所示,分析 陳和 系统的演化

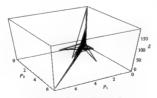


图 5-25 r = 6.0, $P_1^{(0)} = 0.2$, $P_2^{(0)} = 0.6$, $Z^{(0)} = 0.03$, $h_1 = 0.3$, $l_1 = 12$, $h_2 = 0.5$, $l_2 = 10$, $h_3 = 1$, $l_3 = 2$ 財職組基整的相限(基一次轉程)

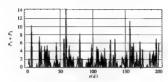


图 5-26 r = 6.0, $P_1^{(0)} = 0.2$, $P_2^{(0)} = 0.6$, $Z^{(0)} = 0.03$, $h_1 = 0.3$, $l_1 = 12$, $h_2 = 0.5$, $l_2 = 10$, $h_3 = 1$, $l_3 = 2$ 时随机系统基类按度和的时程图

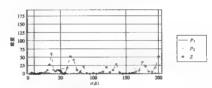


图 5-27 r = 6.0, $P_1^{(6)} = 0.2$, $P_2^{(6)} = 0.6$, $Z^{(6)} = 0.03$, $h_1 = 0.3$, $l_1 = 12$, $h_2 = 0.5$, $l_2 = 10$, $h_3 = 1$, $l_3 = 2$ 时随机系统的纂类及浮静动物的密度的时程图

②选取分岔参数 r=7.8, 初值为: $P_1^{(0)}=0.2$, $P_2^{(0)}=0.6$, $Z^{(0)}=0.03$, 观察系统的相图、藻类 被度和的时程图,如图 5-28、图 5-29 所示。分析随机系统的演化。

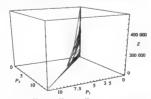


图 5-28 $r=7.8, P_1^{(0)}=0.2, P_2^{(0)}=0.6, Z^{(0)}=0.03, h_1=0.3, l_1=12, h_2=0.5,$ $l_2=10, h_2=1, l_3=2$ 时随机系统的相图(某一次模拟)

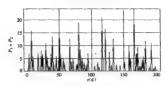


图 5-29 r = 7.8, $P_1^{(0)} = 0.2$, $P_2^{(0)} = 0.6$, $Z^{(0)} = 0.03$, $h_1 = 0.3$, $l_1 = 12$, $h_2 = 0.5$, $l_2 = 10$, $h_3 = 1$, $l_4 = 2$ 时随机系统基本收度和的时程图

②选取分岔参数 $r \approx 10$, 初值为: $P_1^{(0)} = 0.2$, $P_2^{(0)} = 0.6$, $Z^{(0)} = 0.03$, 只視察藥类浓度和的时程图就会看到系统处于一种混沌状态, 如图 5-30 所示。

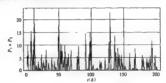


图 5-30 r = 10, $P_1^{(0)} = 0.2$, $P_2^{(0)} = 0.6$, $Z^{(0)} = 0.03$, $h_1 = 0.3$, $l_1 = 12$, $h_2 = 0.5$, $l_2 = 10$, $h_2 = 1$, $l_3 = 2$ 时隙机系统基券按度和的时程图(某一次模拟)

通过用随机增维精细积分法对参数,取不同值时的随机动力系统的数字模拟可以看到, 随机项的系数足够大时,随机系统会是现一种复杂的混沌状态。而亦渐是否会攀及,要由睾发 赤瀬所需塞类旅度的朗值确定。

例如,假設畢发亦期關值(養类浓度) $f_{Nab}=20$,在r=7.8, $h_1=0.3$, $l_1=12$, $h_2=0.5$, $l_2=10$, $h_3=1$, $l_1=2P^{(0)}=0.2$, $P^{(0)}=0.6$, $P^{(0)}=0.03$ 时,从随机系统集类浓度和的时程图(见图 5-29)可以看到,在 100 也內有 2 次暴发的可能(当然每一次的程度可能不同)。若 $f_{Nab}=15$,则 在 100 也內可能量及 5 水 「同程度的亦謂)。

应当指出的是,按照进行數字模拟时的隨机項的取值,系统式(5-46)受到的已不是硝隨机 撤助,研究硝酸机动力系统的理论大多已不适用。联系赤獭模型的实际意义,此处通过随机增 储精组积分法完成的数字模拟已形象她阐明随机系统的不确定性,进而说明赤獭的发生与摄 随机撤抛有着直接的因果关系。

5.2 赤潮食物链的非线性随机动力学

随着人类科技的进步与对生态环境的日益关注、海洋生态系统的研究日趋活跃、赤潮生态 非线性动力学模型的研究成为赤潮研究领域内的一个重要方向。所谓赤潮生态动力学建模。 即考虑不同营养水平的生物物特以及与环境之间的关系,建立起生物、物理、化学的剩合模型。 本节通过对渤海湾典型营养盆浓度、浮游植物密度(震类)、浮游动物密度以及碎屑浓度等因素 的分析、建立了非线性生态动力学的食物性模型、并在考虑了缩机因素后,建立了非线性随机 模型,且目期的增维精细积分洗进行了数字模拟,分析系统的性态。

根据上节中建立的确定系统模型,以 a 及 N 为分岔参数进行分析所得到的结论说明;投 有参数的急剧增长, 藻类浓度 (产龄植物密度) y (1)是 A 空有暴发性增加的。但实际情况却是 赤潮的暴发日益频繁,所以仅靠确定性模型很难说明实际问题。因而在考虑海水中营养盐收 度,浮游结婚密度,浮游动物密度以及碎屑浓度等 4 种物质浓度(密度),以及赤潮发生时 4 种物质密度(密度)的相互作用关系的同时,考虑到实际情况是任何状态都要受到随机因繁的影响,尤其是近岸生态环境可以受到人类活动(排污,航行,抽楞作业等)以及自然环境的随机变 化(光照、气温、雨水、溶液、潮汐等)的多方面随机作用,并利用生态学原理,而建立了如下综合 生态动力学馆机模型。

$$\begin{split} \frac{dx}{dt} &= \frac{dxy}{(x+x)(b+cy)} + \frac{\lambda(by)^2}{(\mu^2+y^2)} + k(N_0-x) + dyz^2 + w\theta + k_{11}w\xi(t) + k_{11}\eta(t) \\ \frac{dxy}{dt} &= \frac{dxy}{(x+x)(b+cy)} + \frac{\lambda xy^2}{(\mu^2+y^2)} - ry - (x+k)y + k_{11}y\xi(t) + k_{21}\eta(t) \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{dxy^2x}{(\mu^2+y^2)} - dx^2 + k_{21}w\xi(t) + k_{21}\eta(t) \\ \frac{dw}{dt} &= (1-a-\beta)\frac{\lambda y^2x}{(\mu^2+y^2)} + ry - w(k+\theta+\psi) + k_{41}w\xi(t) + k_{41}\eta(t) \end{split}$$
(5-47)

其中,x(t)代表营养物质,包括氮、磷等营养元素的浓度总和;y(t)代表浮游植物密度(各类可导致赤潮发生的藻类密度之和);z(t)代表浮游动物密度;w(t)代表海水中有机物和无机物版小的碎屑浓度; $\xi(t)$ 、y(t)为相互独立的零均值标准 Gauss 白噪声; k_e 为非负实数。

四种物质的相互作用关系、参数的取值表参见4.3.2节(表4-3)。

 $k_1, x(t) + k_1, \eta(t)$ 由乗性激励部分和独立外界激励部分组成。前者 $k_1, x(t)$ 说明随机因 综合各种随机因第 |x| x(t)的变化率的贡献与当时 x(t)的大小有栗性关系;而后 $k_1, \eta(t)$ 可认为是外界随机因素强行作用引起 x(t)的变化率的改变程度(对 y(t), x(t), w(t)的情况有类似的说明,此处从略)。

首先设迭代矩阵 B 的确定部分为

$$B_0 = \begin{bmatrix}
-k & 0 & 0 & \phi & -\frac{\cos y}{(e+x)(b+q')} + \frac{\lambda(2g)^2}{(\mu^2+y'^2)} + kN_0 + d\gamma^2 \\
0 & -r-k-s & 0 & 0 & \frac{\cos y}{(e+x)(b+q')} - \frac{\lambda g^2}{(\mu^2+y'^2)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial y^2 x}{(\mu^2+y'^2)} - d^2 \\
0 & r & 0 & -k-\phi-\psi & (1-a-\beta)\frac{\lambda y^2 x}{(\mu^2+y'^2)} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$
(5.48)

迭代钜选 B 的随机部分为

$$\boldsymbol{B}_{z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & k_{11} \pi \mathcal{C}(z) + k_{12} \eta(z) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{11} \pi \mathcal{C}(z) + k_{21} \eta(z) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{11} \pi \mathcal{C}(z) + k_{21} \eta(z) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{11} \pi \mathcal{C}(z) + k_{21} \eta(z) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{11} \pi \mathcal{C}(z) + k_{21} \eta(z) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_{12} \pi \mathcal{C}(z) + k_{21} \eta(z) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
(5-49)

若确定项系数取默认值,而随机项系数取值为

$$k_{11}=0.3, k_{12}=6, k_{21}=0.6, k_{22}=6, k_{21}=0.2, k_{22}=2, k_{41}=0.1, k_{42}=1$$

在进行數字模拟时选取初值为 $x_0 = 0.4$, $y_0 = 0.9$, $z_0 = 0.4$, $w_0 = 0.1$;在计算數值时,考虑 到实际情况将时间间隔取为 $\tau = 0.5$ d, 在绘制图形时考察 100 d 作为一个观察分析时间区间。

絡结果与相应的确定系统比较可知,在相同的初值条件下,确定系统可能是稳定的。对于 相应的随机系统,当随机因素对者非物质的浓度总和 z(x)的变化作用较大时就极易引发浮游 植物密度 y(x)的暴发性增长,从而极易导致赤膊的发生。

在此以a(浮游植物的最大生长率)及 N_0 (混合层以下的营养盐浓度)为分岔参敷进行数字模拟、观察分析随机系统的性态。

①当 α = 0.28, N_0 = 0.6, 初值选为[0.4,0.9,0.15,0.08] 时, 模拟随机动力系统在域 $\Sigma(x,y,z)$ 内可得系统和概类特度 $\gamma(z)$ 及系统各类物质浓度的时程图,如图 5-31、图 5-32、图 5-35 所示。

通过比較可以看到在 a=0.28, $N_o=0.6$ 时, 确定系统在域 $\Sigma(x,y,z)$ 内有稳定的 1 环面 (系统具有稳定的高维 Kopf 分态);但相应的随机系统是不稳定的。而且集类浓度 y(z)随者随机 俄撒朗的增大而有较大变化。所以 —旦超过赤侧出现所需集类浓度的侧值,则会引发赤潮暴发,去临低离举物所的离大生长率合得到处鲜的愉风。参见下例。

②当 $_{a=0.2,N_0=6.0}$,初值选为 $_{[0.4,0.1,0.05,0.08]}$ 时,模拟随机动力系统在域 $_{\Sigma}(x,y,z)$ 内可得系统相图及募类浓度 $_{\gamma}(z)$ 的时程图,如图 5-34、图 5-35 所示。

通过比较可以看到在 $\alpha=0.2,N_0=6.0$ 时,确定系统在域 $\Sigma(x,y,z)$ 内有稳定的平衡点;但相应的随机系统是不稳定的,而且藻类浓度 y(z)随者随机激励的增大而有较大变化,所以一旦超过赤潮出现所需藻类浓度的阈值,则会引发赤潮晕发。在随机系统中若 N_0 的值有显

著增大,则会使—类浓度 $\gamma(t)$ 以及其他各类物质的浓度发生较大幅度变化,参见下例。

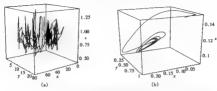


图 5-31 a = 0.28, $N_0 = 0.6$ 时簡机系统与确定系统在域 $\Sigma(x, y, x)$ 内的相图的比较 (a)随机系统;(b)确定系统

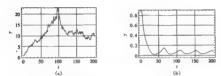


图 5-32 a = 0.28, $N_0 = 0.6$ 时随机系统与确定系统赛类浓度 y(t)的时程比较 (a)除机系统:(b)确定系统

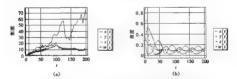


图 5-33 a = 0.28, $N_0 = 0.6$ 时臟机系统与确定系统各类物质帐度的时程比较 (a) 随机系统;(b)确定系统

③当a=0.2, $N_0=9.0$, 初值选为 $\{0.4,0.1,0.05,0.08\}$ 时,模拟随机动力系统在域 $\Sigma(x,\gamma,z)$ 内可得相图及纂类浓度 $\gamma(z)$ 的时程图, 如图 5-36、图 5-37 所 π 。

通过比较可以看到在 $\alpha=0.2$ 时, $N_0=6.0$ 与 $N_0=9.0$ 所得确定系统在域 $\Sigma(x,y,z)$ 内省有稳定的平衡点;但相应的随机系统都是不稳定的,而且在同样强度的随机激励的作用下后者的事类浓度 y(t) 变化程度明显大于前者。所以若同时增大事类的最大增长率 α 及混合层以

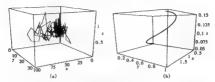


图 5-34 $\alpha = 0.2$, $N_0 = 6.0$ 时随机系统与确定系统在域 $\Sigma(x, y, z)$ 内的相图的比较 (a)随机系统:(b)确定系统

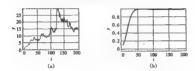


图 5-35 $a=0.2, N_0=6.0$ 时随机系统与确定系统藻类浓度 y(i)的时程比较 (a)随机系统;(b)确定系统

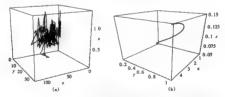


图 5-36 $\alpha = 0.2, N_0 = 9.0$ 时随机系统与确定系统在域 $\Sigma(x,y,z)$ 内的相图的比较 (a) 随机系统:(b) 确定系统

下的营养元浓度 N_0 ,则必会使濂类浓度y(t)的变化程度更大,参见下例。

④当 α = 0.28, N_0 = 9.0, 初值选为 $\{0.4,0.1,0.05,0.08\}$ 时模拟随机动力系统, 在域 $\Sigma(z,\gamma,z)$ 内可得系统相图及纂类浓度 $\gamma(z)$ 的时程图如图 5-38、图 5-39 所示。

通过数字模拟并比较了以上各例,可从理论上分析得到随机系统相应的确定系统在相同 的初值条件下悬稳定的。而实际问题是赤潮经常出乎预料地发生了,通过分析可以认为,随机

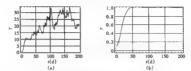


图 5-37 a=02, No=9.0 时随机系统与确定系统囊类浓度y(t)的时程比较
(a)随机系统;(b)确定系统

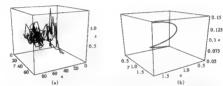


图 5-38 $a=0.28, N_0=9.0$ 时随机系统与确定系统在域 $\Sigma(x,y,z)$ 内的相图的比较 (x) 随机系统; (b) 确定系统

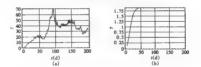


图 5-39 a=0.28, No=9.0 时随机系统与确定系统集类浓度 y(s)的时程比较 (n)随机系统;(b)确定系统

因素干扰应当列入导致赤潮发生的主要原因之一。

在模拟随机系统时法取破机项的系数较大,即系统受到强制机搬励。而这种强随机激励 的存在往往会使原来的确定系统失去稳定性,并且被各类物质的浓度,尤其是俘游植物的密度 发生大幅度变化,一旦在某时达到赤榈出现所需集次族皮的阈值,则合导致赤潮暴发。

第6章 赤潮的回归预测

同归是统计学中—个重要的研究方向。当给定 n 个自变量(也称作输入变量、解释变量) x = 1x, x, v, v, v, 的值时、一般希望得到一个或多个因变量 y(或者输出变量、响应变量)的值, 并假定 y 是单变量。通常的微法是通过给定的一组自变量及对应因变量的值 y, x, i, '估 计出一个从 x 取值空间 D C 里、映射到y 取值空间的函数 f (x)。 当已知新的白变量 x 的值、对应的预测值就是 f (x)。如果因变量 y 取值是连续的, 统计学中称为回归。如果 y 取值是直被的, 则称为分类, 同样的问题也是机器学习研究的重点。对于因变量 y 取值是连续的情形, 也被称为函数估计, 函数近似, 实值预测, 连续分类学习等等。为线一起见,本章采用统计术语——回归。对于 y 取值离散的情况, 就是通常所说的系统辨识, 本事一律称作分类。固定值 [v, x, i, '在机器学习中称作训练样本。而在统计学中、是称为样本。

机器学习关心 序(x)实现的具体算法以及预测的精度,预测的精度主要是通过实际的数 据要检验的。格勒探集的一部分当作训练样本构造函数 f(x) 应者 if-then 规则集(实质上也 可以看作函數),剩下的用來檢驗得到認差,这样获得的認差只是真实误差的一个观测值。为 了所好他估计直定退差。一般采用交叉证定(cmes_validation), 即随机能格数据集分成训练集和 检验集摄到一个设装值 万复多次讲行 获得一组误参值 这组误参值的均值就是真实误差的 一个好的估计。一个好的算法,不仅要求较高的精度,而且所得的模型能够很好地解释实际问 题,也就是函数 $\hat{F}(z)$ 要有明确的意义,比如决策树(decision trees)就比人工神经网络更容易理 解、解释。 通常由训练样本得到函数估计 f(x)的算法是很复杂的,在实际应用中,许多数据 都是海景的 所以运算代价县不得不考虑的问题。如何将这些复法融入数据库就是 KDD (Knowledge Discovery in Database)的研究方向。它泛指所有从源数据中发掘模式或联系的方 法、人们接受了这个术语、并用 KDD 来描述整个数据发掘的过程,包括最开始的制定业务目标 驯易你的结果分析,而用数据挖掘(datamining)来描述使用挖掘算法进行数据挖掘的子过程。 但最近人们却逐渐开始发现数据挖掘中有许多工作可以由统计方法来完成,并认为最好的策 略界絡统计方法与数据挖掘有机地结合起来。数据仓库技术的发展与数据挖掘有着密切的关 数据仓库的发展县保使数据挖掘越来越热的原因之一。但是,数据仓库并不是数据挖掘的 先决条件,因为有很多数据挖掘可直接从操作数据源中挖掘信息。由于数据库的数据来自不 间的领域,很难有专家能格不同领域的联系讲述得一清二楚,所以这种自动发现知识的方法是 很实用的。当然这需要统计学家、计算机专家和数据库专家的大力合作。

统计学对报测值 f(z)的新近分布更感兴趣,有了预测值的新近分布统可以控制预测的 规范、当然这得假定因变量 y 或有自变量 z 是随机变量, | y, z, | ! 是该随机变量的独立同分 布的结本, 目哪定

 $\gamma = F(x_1, x_2, \dots, x_n) + \varepsilon$

其中:n 元函數 F 决定 f 自变量 $|x_1,x_2,\cdots,x_n|$ 与因变量的关系; ϵ 是隨机噪声,期望为零,方 E 为 1。噪声既不可控制,也不可视制。回归的目的就是通过样本给出函数 F 的一个合理的估计 \hat{F} 。如何评价"合理",必须定义损失函数 L(y,F(z)),理论上最好的估计就是

$$\hat{F} = \arg \min E_{r,z}L(\gamma, F(z)) = \arg \min E_z[E_z(L(\gamma, F(z))) \mid z]$$
(6-1)

当然,由于(v,x)的联合分布是未知且不可以计算的,只能通过样本估计 F。

对于回归问题,经常使用的损失函数 L(y,F)有平方损失 $(y-F)^2$,绝对损失|y-F|和 Huber 损失函数, 其中 Huber 损失函数

$$L(y, F) = \begin{cases} \frac{1}{2} (y - F)^2 & (|y - F| \le \delta) \\ \delta(|y - F| - \delta/2) & (|y - F| > \delta) \end{cases}$$

$$(6-2)$$

如果考虑分类问题,Logistic 回归可将两种类型的分类问题转化成回归问题,限制 y 取值 为±1.假设

$$F(x) = \frac{1}{2} \log \left[\frac{P(y = 1 \mid x)}{P(y = -1 \mid x)} \right]$$
 (6-3)

由于容易得到概率估计

$$P(y = 1 | x) = 1/(1 + e^{-2P(x)})$$

 $P(y = -1|x) = 1/(1 + e^{2F(x)})$

所以对应的二项分布的负对数似然函数

$$L(y, F) = \log(1 + \exp(-2yF))$$
 (6-4)

其中, y ∈ |-1,1|。

式(64)也就是两种类型分类问题的 Logiatic 回归的损失函数。对于多种类型的分类,常用的方法就是两两对比,取定一种类型,剩下的作为另一种类型,反复比较,从而得到归属的类型。另一种方法是调整损失函数为多项分布的负对数似然函数。通过式(64)可特分类和回归统一起来,极大地方便研究,而且该方法以极大似然估计作为理论背景,在实际应用中也取得很好的效果。当然,有许多算法是将回归问题转化成分类问题,如规则演绎(nile induction),因为这些算法更容易解决分类问题。

在经典线性回归情形中,自变量 z 被认为不是随机变量。 $[y_1,z_1]^T$ 是独立同种分布的样本,只是参数值与 z_1 有关。而为了提高预测的粮度,算法已经越来越复杂。单纯从理论上推导变得不大规定。更多的是借助于随机模拟和自助法(bootstrap)计算预测值 F(z) 的重信区间及额近分布。

回归方法—般分为参数和非参数两种。

多数方法假定自变量和因变量间的真实函数关系 f 是特定的带有参数 $a = \{a_1, \cdots, a_p\}$ 的 所數,只要确定这些参数、相应的函数就完全确立。原则上选择参数使得期望损失

$$R(\alpha) = E.\left[E_{-}(L(\gamma, F(\alpha)))|x;\alpha\right] \tag{6-5}$$

最小,但是由于(y,z)的联合分布是未知的,只能用样本的经验误差

$$R_{mp}(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} L(\gamma_i, F(x; \alpha))$$
 (6-6)

代替 R(a),最小化 R_{mo} 的 a 就是參數 a 的估计值。參數方法較少穩定性、只有当真实函數和 假定函數形式接近时才可获得较好的預測结果。簡单的參數模型只需較少的样本,拟合的速度快、得到的函數容易解釋。如果白獎戶 a 相比于 $\Gamma(x)$ 较大,即使參數模型选择有限,則系稅 幾差应该也不会很严重。选择合适的模型販处于应用的目的。如果为了说明自变量和因变量的关系。应该作比较简单的模型,如线性回归和非线性回归,如果只是为了能够得到新的自变

量的预测值以及提高预测的精度,可以考虑复杂的余数模型,加入工神经网络。

非參數方法一般沒有明确的函數形式,对于新的自变量 x、预测值 $P(x) = \sum_{i=1}^{n} S_i(x,h)y$,其中 k 是可选的平清參數,表示样本观测值的权重且隨着 x 的不同而不同。一般说来,离 x 趣近的观测值。对应的,的权重越大。由于 x 和x 都属于 R^* 空间,距离的远近应通过危敷来衡量,活用的起乎方态数。常用的非参数回归有差于实例回归,局部加权回归(LESS)和样条回归等等。非参数方法在能律空间有着很好的效果,但是在高维空间,由于存在"转数文雕"的问题,为了使样本均匀分布在自变量的取值空间 $D_{C}R^*$,需要大量的样本,且样本量 N 随着纳数,指数递增,所以非参数方法在高维空间的效果与样本量密切相关,如果样本量过小,则效 鬼不保 如人意

各种常见的回归方法将在以下各小节分别讨论。

6.1 非参数回归

6.1.1 基于实例回归

一个实例就是一个现例值(y, x,), 由于基于实例同归(D. Aha, 1991; B. Dasarzsthy, 1991; D. Kibler, 1989)通常由人工智能,机器学习等领域专家提出,为了方便不同读者,保留实例的概念。基于实例回归计算前单,没有假定模型,样本就是模型。

$$Sim(x_i, x_j) = \sum_{i=1}^{n} (1.0 - |x_{ii} - x_{ji}|)$$

其中 za 表示实例 z, 的第 k 个分量。

基于实例回归的假定就是自变量和因变量的真实函数是局部线性的,对于充分大的样本, 基于实例回归能很好地近似连续减数。不言而喻,基于实例回归假定所有的自变量都与因变量问等相关,但是很有可能几个自变量就能够决定因变量的值,而不需要全部的自变量。为了 或少海量数据的存储空间,可以采用平均实例的办法(D.Aha, 1991)。基下实例回归最大的缺 点效是它不能够得到限确的模型解释样本,揭示各种变量之间的关系。

```
1 标准化用本中的任一个实例 _{\infty} 的每一个分量则区间\{0,1\} 标准化部的检查式例 _{\infty} _{\infty}
```

算法 6.1 近個算法

6.1.2 局部加权回归

局部加权回归与6.1.1 节基于实例回归有很大的相似性。第一,两种算法拟合样本的主要步骤是存储样本,大部分工作是在预测的增接完成的,也就是说。每预测一个新值。必须完成大量重复的工作。这两种沉透照累下"情性"平习方法。第 , "负预测一个新的自变量。功 与 z 相近的实例 z, 很大程度上决定预测值。第三,它们都把实例表示成 R*空间中的点,距离 的远近通过范敦度量。但是两种方法也存在差异。基于实例回归首先选择新实例周围一定数量的实例,然后平均这些实例对应的响应值;而局部加权回归在新的实例中建立一个平均的模型、概氮的参数与新的实例密切相关。局部模型一般是次数不超过 2 的多项式。当一个新的实例依据例题值。局部模型就被翻除、对每一个新的实例作出预测都是重立局部模型。在这些局部模型中,与新的实例接近的样本在局部模型中有数大的权值、而远的实例权值很小甚至为零。局部加权回归一般用在自变量给数 n≤2 的情形。

修改全局参数模型得到局部加权回归,全局参数模型就是侧定

$$F = g(x; |a_j|_1^p) \tag{6-7}$$

 $g(x; |a_i|^*)$ 就是参数模型,最常用的就是线性模型

$$g(x; |a_i|_1^p) = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i x_i$$
 (6-8)

|a, | | 的估计值 | â, | | 就是使得经验损失最小的 R' 中的点, 即

$$|\hat{a}_{j}|_{i}^{p} = \arg \min_{\{x_{i}, y_{i}\}} \sum_{i=1}^{n} L(y_{i}, g(x_{i}; |a_{j}|_{i}^{p}))$$
 (6-9)

为了保证在新的实例 x 周围的观测值 x, 对回归有更大的影响,在参数估计中引入权值,即

$$|\hat{a}_{j}(x)|_{1}^{p} = \arg \min_{\substack{x_{i}|_{1}^{p} \\ x \neq i}} \sum_{i=1}^{n} \omega(x, x_{i}) L(y_{i}, g(x; |a_{j}|_{1}^{p}))$$
 (6-10)

由于权重函数 $\omega(x,x_*)$ 随 x 不同而变化,对于每一个新的 x_* 多数估计值 $|\hat{c}_g(x)|$? 是 x 的函数。这种近似的性质很大程度上取决于 ω 的选择,其次是多数函数 g 的形式。研究的最多的 是常数函数 $g(x;\alpha)$ (E. Parzen, 1962; D. Shepard, 1964; M. Bonzini, 1985)。 W. S. Cleveland (1979)建议的线件函数 g 得到更好的结果,尤其在边界区域(W. S. Cleveland, 1983)给出 f g 是 :次多项式的结论。 C. J. Store(1977)指出当采用简单的权值函数时,真实函数 f 的连续性质决定高阶多项式的收敛速度。

局部权策回归最大的难点就是权重 a) 的确定, 这在很大程度上取决于直实函数 f 的性 盾。但是 P 是未知的。任何把主要权重放在以 z 为中心的凸象上的函数都可以当作权重感 勒 揭常用的武县核平滑

$$\omega(x,x') = K(d(x,x')/s(x))$$
 (6-ii)
其中 $d(x,x')$ 表示点 x 和 x' 之间的距离。常用的就是平方花数; $s(x)$ 是标量,称作步长(band-

width): K 悬单变量的核 gg n (kernel function)。 随着自变量的增大,核函数的绝对值逐渐减小, 对任何一个核函数,都有 $K(\gamma)$ d $\gamma=1$ 。表 6-1 列出了一些常用的核函数,其中 $I(\cdot)$ 表示示性

表 6-1 常用核函数		
核函數	K(x)	
均匀核函数	$\frac{1}{2} I(z \le 1)$	
Toengoler -	$(\mathbf{i}- \pi)I(\pi \!\in\!\!1)$	
Epanechnikov	$\frac{3}{4}(1-x^2)/(1x) \le 1)$	
Quaritic	$\frac{15}{16}(1-x^2)^2I(x \le 1)$	
Traweight	$\frac{32}{35}(1-x^2)^3I(1x) \leqslant 1)$	
高斯核函數	$\frac{1}{2\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{2} x^2 \right\}$	
余弦橫蜿敷	$\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}z\right)l(z \le 1)$	

函数。惯用的步长 $s(x) = s_0$,此时就是核 平滑: 若 *(x) = **/n(x), 称为近邻平滑, 其中 n(x) 悬点 x 的局部密度估计。步长 s(x)是重要的局部性质控制参数,若 s(x) 太小。@ 能反映出 x 每个相邻点包含的信 息. 但 x 图图的有较大权雷的观测值 x 较 少。也就是用来建立局部模型的数据不是 很充分。例如对于高斯核函数来说,只有 4。若图内的强测值对估计产生影响,所以 参数的估计值会有较大的方差。反之,过 多的观测值 x. 被赋予相差不大的权重,不 能体理局部的差异性,所建立的局部模型 前公产生较大的偏。当《趋于四时、植形 的局部性质就会消失,对任意的 x、都有

F(x) = 常教, 估计值的偏相当地大, 所得的估计失去了意义。综合考虑偏和方差, 就可以得到较优的步长 s(x)。在低维情形(n≤2)中,因为在没有大量数据的情况下,新近条件也是可以 准足的,所以通过步长,控制[4]?的估计不会产生很大的问题。但在高维情形中,以 x 为中 心的圆球,容量随着半径的 n 次幂增大,为了保证 a 赋予足够的权值给相邻观测值以减少 |a, | f 的方差, 步长 | a, | f 必须选择得很大, 这样估计的偏也是很大的。

一般假定 $g(x; \{a, | \})$ 为常数,线性函数、二次多项式、更高次多项式在实际中较少见到。 而目局部加权回归只在 n < 2 时有较好的效果, 当纬敷较高时, 更多的是将 F 表示成一系列一 元或者 二元函数的和的形式,更多的细节将在6.1.4节介绍。如果损失函数取 L(v,F)平方损 失 $(y - F)^2$,且假定 $g(x; |a,||^2)$ 为常数,不难得到 Nadraya-Watson 估计

$$\hat{F}(x) = \sum_{i=1}^{R} \frac{\omega(x, x_i) \gamma_i}{\sum_{i=1}^{R} \omega(x, x_i)}$$

与近邻算法相比,只是 x 周围的观测值 x, 的权重有所不同,但实质上是一样的,前者通过相似 度函数分配权重,后者通过核函数分配;前者通过 K 控制模型的复杂度,后者的步长是个平滑 參数。所以当g(x;(a,)!)为常数时,局部加权回归实质就是基于实例回归。当g(x;[a,!])为一次多项式(6-8)时,相应的预测值就是

$$\hat{F}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{(B_2(x) - B_1(x)) d(x, x_i) \omega(x, x_i) \gamma_i}{B_2(x) B_0(x) - B_1(x)^2}$$

其中 $B_r(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (d(x,x_i))'\omega(x,x_i), r = 1,2$ 。 与近邻算法相比, y_r 的权意系数 $[(B_1(x) - B_1(x))d(x,x_i)]\omega(x)]/N(B_1(x)B_0(x) - B_1(x))$ 和不再是 1。 当 $g(x;1o_r|f)$ 为二次 多項式計 F 没有明确的表达式,只能运用数值方法来解。

6.1.3 样条回归

对真实函数 f 作出任何的假定都是为了缩小搜索空间 F,搜索的目的是寻找使得经验损失

$$R_{\text{exp}}(F) = \sum_{i=1}^{N} L(y_i, F(x)_i)$$

最小的函数 F*,由于经验损失只是期望损失

 $R(F) = E_*[E_*(L(\gamma, F(x)))|x;a]$

为了减少解的不确定性,且对搜索空间 C^1 空间不加人参数限制,引人"粗糙"惩罚,一个 常用的"粗糖"的都量是拉普拉斯平方积分

$$r(F) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} \left[\left| \frac{\partial^{2} F}{\partial x_{t} \partial x_{t}} \right|^{2} dx \right]$$

易知线性函数的"粗糙"为零,这样所得函数估计就是

$$\hat{F}(x) = \arg\min_{i} \{ \sum_{i=1}^{N} L(y_i, F(x_i)) + \lambda r(F) \}$$
 (6-12)

其中 λ>0,是平滑参数,它平衡经验损失和"粗糙"的代价。随着 λ 从 0 变化到∞,估计函数从 最复杂,单纯解释样本)到最简单(线柱回归)。所以,λ 控制者模型的复杂性,这同核函数的步 长有着同样的性质。同样,这种方法也很难推广到高维情形。对于 n ≤ 2 的情况,已经证明, «(6.12)的解键是一次样金品值。

由于样条函数是分片函数、所以样条回扫实质上也是分片回归(precraise regression)、它的 基本思想是在自变量取值空间 D 的不同于区域假定不同而简单的参数模型。常用的是低阶多 项式、约束条件就是保证所得函数连续或者有连续的几阶 守髮、于区域的个数和连续导数的 最高阶数决定着模型的平滑性和弹性。同样理论上将样条函数推广到高维是可行的,但实际 上是很困难的,上要还是由于"学数灭难"的原因、非亲函数的于区域由,个安徽中每个变置 的K+1个区间(由 K 个节点次定)的张界组成。由于 K 个节点的一元样态数的基础数的 对于在区间[a,b]上节点 t_1, \cdots, t_K 已知的一元 q 次样条函数。B 样条函数是連归定义的。 ϕ $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4 = a$, $\tau_{4+j} = t_j (j=1,\cdots,K)$ 且 $\tau_{5+k} = \tau_{6+K} = \tau_{7+K} = \tau_{6+K} = b$,则对 j=1, $2 \cdots K + a$ K

$$B_{j}(t|q) = \frac{t - \tau_{j}}{\tau_{j+q} - \tau_{j}} B_{j}(t|q - 1) + \frac{\tau_{j+1+q} - 1}{\tau_{j+1+q} - \tau_{j+1}} B_{j+1}(t|q - 1) \qquad (6-13)$$

其中 $B_j(t|0)=1$, $\tau_j \leqslant t \leqslant \tau_{j+1}$, 否则 $B_j(t|0)=0$ 。 三次 B 样条基函数 $B_j(x)$ 就是 $B_j(x|3)$, 所以节点已知的三次样条函数就可表达为

$$F(x) = \sum_{i=1}^{K+4} \theta_i B_i(x)$$

基函数个数就是 K+4,也就是相应函数空间纬数就是 K+4。

g 次幂样条函数的截尾次幂基函数为 1, |x' | 1, |(x - t_s) 1, | 1, 其中 t_1, ..., t_k 是节点, 且

$$(x-t)_{+} = \begin{cases} x-t & (x \leqslant t) \\ 0 & (x \leqslant t') \end{cases}$$

$$(6-14)$$

同样,对干三次样条函数,截尾次幂基函数个数还是 K+4。

6.1.4 广义累加模型

由于局部加权回归和样条回归都很难推广到高维情形、它们只是在 n ≤ 2 时取得令人满意的效果,对高维情形, 假定函数是低维的展开形式,即

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} g_{j}(x_{j})$$
 (6-15)

其中 z, 表示提前选好的自变量 $|z_1, \dots, z_n|$ 的小的子集且 z, 中变量个数小于等于 2。这样,一个 n 个变量的多元函数由 J 个变量不超过 2 个的函数的和来表示。任何一个变量 z, 都可以在不同的 z, 中出现,有时为了实际问题的需要,可以附加一些条件,称为广义暴加模型(generalized additive model)。由于非参数平常方法对一元函数报合的效果很好,如果限制 $z_i = |z_i|$,则维那等成

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} g_j(x_j)$$
 (6-16)

称为累加模型(additive model)。 票加模型只有 n 項单变量函数,在实际应用中,票加模型表现 出极好的稳鍊性。

选定变量子集 $|z_i|^2$ 后,相应的函数 $|s_j(z_j)|^2$ 可以通过非参数方法估计,同样还是要求经验损失最小。常用的损失函数是平方损失,所以

$$|\hat{g}_{j}(z_{j})|_{i}^{j} = \arg\min_{\ell} \sum_{i=1}^{n} [y_{i} - \sum_{i=1}^{j} g_{j}(z_{i})]^{2}$$
 (6-17)

对于样条函数来说。由于每 个子集 z, 都有一组基函数。式(6-17)的解數可表示成这些 基份非果的线性组合,再通过全局的最小二乘估计得到系数(C. J. Stone, 1985)。为了保证 所估计的函数的平衡性,在式(6-17)中加、用户解除"宽阳"的

$$\|\hat{g}_{j}(z_{j})\|_{1}^{j} = \arg\min_{\delta_{j}} \sum_{i=1}^{p} \{ [y_{i} - \sum_{j=1}^{j} g_{j}(z_{q})]^{2} + \sum_{j=1}^{j} \lambda_{j} r(g_{j}) \}$$
 (6-18)

这就是存在交互作用的样条函数(C.Gu, 1990)。

直接优化式(6-18)是很难的、A. Buja (1989)提出循环的"滞后"报合公式,联合低维非参数估计,解决以上优化问题。该程序依次重新估计

$$\hat{g}_j(z_j) \leftarrow \arg\min_{z} \sum_{i=1}^{N} \left[(y_i - \sum_{i \in S_k} (z_{ij})) - g_j(z_{ij}) \right]^2$$

宣到函数不再变化。对于每一次循环、首先计算仍残差 $y_i^* = y_i - \sum_{i \neq j} g_i(z_a)$,以 z_i 为自变量拟合这些仍残差。由于 z_i 的个数不大于2。局部加权回归或者辞条回归等非参数平得方法都可以来用。循环的初值可以任意造取,如 $g_i(z_i) = 0, j = 1, \cdots, j_c$ 如果在每次循环付油微 g_j 的过程中引人"粗糖"惩罚(如武(6-12))、"滞后"拟各公式载可以得到式(6-18)的解。

依据低维非参数估计展开的厂义票加精型在实际中获得很大的成功。但是作为一种多元回归方法,还存在一定的局限性。首先自变置于第 $\lfloor z_i \rfloor$ 不能通过样本自动选取,由于总共行 在 n(n+1)/2 个一元或者 二元子集 且最好子集的选取取决于朱知的真实函数 f -考虑到计算 的复杂性以及样本的有限性,不可能把所有的子集都加入模型中,只能挑选一部分当作低维规 开。其次,由于每一次的低维非参数回归都存在一个平常参数,即核函数的步长、样条函数的 玄点数、"新雕形"运到的,同样这些平滑参数最好的选取由未知的英文函数 f 决定。如果建立一个模型选择准则,如交叉证实 (cross-validation),广义交叉证实 (generalized cross-validation),编定最好的平滑参数,则需要多参数的数值优化,计算的代价很大,而且同时估计很多的平滑。参数的效果不得而知。

6.1.5 投影寻踪回归

20世纪80年代国际统计界兴起的投影寻森技术(PP)以数据的线性投影为基础,寻找线性投影中的非线性结构。因此,它可以用来解决一定程度上的非线性问题。投影了踪回口技性投影中的非线性问题。投影了家员上发步了漏免线性回归不能反映实际非线性原始数据的结构和特征,从而利用计算机技术,将高维数据通过线性组合的方法转换为低维数据,并在低维数据,上对数据结构进行分析,最终在此基础,建定投影空间与预测对象之间的回归模型,以设计如何产结补的自治。因此、PPR属于一种形案性散影的方法(EDA)、是某了"竞技和

数据出发一通过计算机模拟一预报"建立模型的,较传统的统计方法具有一定的稳健性,适合 处理高维生产本数据和一定程度的非线性问题。

投影寻踪回归模型采取用 -系列岭函数的和来逼近回归函数的方法,即

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(\beta_n^T \cdot x)$$
 (6-19)

其中 S_a 表示一元的光滑岭函数 B_a 是投影方向参数 M 是岭函数的个数。由于 S_a 一般是非 参数的,而且 M 也是未知的,所以直接通过全局最小二乘估计是比较困难的。算法 6-2 描述 了投影寻踪回归的算法。该算法依次搜索准则

$$I(\beta_n) = 1 - \sum_{i=1}^{N} (r_i - S_n(\beta_n^T \cdot x))^2 / \sum_{i=1}^{N} r_i^2$$
 (6-20)

最大的 $\hat{\pmb{\rho}}_a$ 作为 $\pmb{\rho}_a$ 的估计, S_a 是俄先选定的一元非多数平滑回归方法。J.H. Friedman (1981) 采用的是变步长的局部线性回归。估计出 $\pmb{\rho}_a$ 和 S_a 后,改变残ಪ为 $r_i \leftarrow r_i - S_a$ ($\pmb{\rho}_a^T \cdot x$),作为下一次搜索式(6-20)的残差。如果所得的 $I(\pmb{\rho}_a)$ 小于给定的阈值,则停止循环。

重法 6-2 投影寻踪回归算法

对于变步长的一元局部线性回归,在变化大的局部,点 z 的步长 z(x)也較大。接下来的问题就是怎样描述点 z 的两部安化性。固定步长 z_b 的局部线性同归在点 z 的残差平方和的均值可以看作点 z 的场形变异性。同样也可以要求局部变异性也是平衡的即再用一次平滑公 z 放合所得的残差平方和均值,最终得到的平滑值当作点 z 的步长 z(x)。J.H. Friedman (1981)在运用变步长局部线性回归之前还通过简单的平滑算法(选取相邻三个数的中位数)(J.W. Tukey, 1977)拟合因变量值 r,。选取相邻三个数中位数平滑算法的一个简单例子如算法6-3 所示。J.H. Friedman (1981)的一元平滑集法全注题见算法6-4。

```
原始數据: 4 7 9 3 4 11 23 1304 10 15 12 13 17
平榜數值: ? 7 7 4 4 11 12 12 15 12 13 13 ?
管社 6.3 活動細紙三个數中价數平滑算技
```

界伝 6-3 齿取相邻二个数中位数个有异体

- · 连数组第三个数的中位数据合因变量值 //
- 2 计算固定步长的局部线性回归在点 x 的残差平方和的均值
- 3 以固定步长平滑这些均值
- 4 以平滑后均为步长局部统性拟合步骤 1 得到的數据

算法 6-4 变步长平滑算法

6.2 回归树及其集成笪法

通常在預測工作中,许多变量被测量、那么究竟是哪些預測变量給出了重要的預測信息, 它们是如何給出这些信息的? 有时为了預測的精度,假定的函数关系是很复杂的,但是复杂模 塑很难的出明确的实际意义。当问题的目标是理解所研究的对象,并且理解各个变量对预测 的影响,那么如果一个易于理解和解释的预测函数与一个数学上复杂的预测函数具有相当的 准确性,前差异数更加可能。

Briman (1984) 等则位统计学家董基基提出 CART (classification and regression trees)非參數方 法。CART 采用了与传统统计学完全不同的方式构建而测函数。它所构建的预测函数以二叉 决策构的形式给出,非常容易理解。使用、说明和解释、它的函数形式还是累加模型,即

$$F(x) = \sum_{i=1}^{J} b_i I(x \in R_i)$$
 (6-21)

其中: I_0 : I_0 :

集成学习技术是机器学习领域近10年研究的热点之一。它试图连续地调用简单的学习 算法、通过安安学习样本获得不同的基础学习器 最后将这些基础学习器组合起来。成为一个 可以达到需求精度的方法。一般来说,组合学习器的复杂程度要比基础学习器高得多。 相比 较学习器复杂程度的增加,如果性能的或进更为显著,那么最终的学习器不仅能减小拟合误 差,而且将超高还化能力。

Penurd (1997)的 Boosting 和 Beriman (1996)的 Bagging 是集成学习中最具代表性和应用前景 的两类方法。两者都建立了通过投票结合起来的股票金。它们的主要区别在于 Bagging 研 练集的选择是随机的。各轮训练集之同相互独立。而 Boosting 训练集的选择不是独立的。每轮 训练集的选择与前面各轮的学习结果相关。Bagging 的各个预测函数没有权置,而 Boosting 是 有权置的: Bagging 的各个预测函数可以并行生成。而 Boosting 的各个预测函数只能顺序生成; 对于据终极为新时的学习方法。Bagging 可以进行生成。而 回归树的梯度 Boosting 算法 (J. H. Freidman, 2001) 将梯度下降技术应用于回归树中。它特年论定代的基础学习器(回归树)在 ェ上的值看作损失函数空间在 ェ上的负梯度 , 特基础学习器前的系数者作步长,来遥近误差函数空间的最小值。如果将 Bagging, 的思想融入到回归树的梯度 Boosting 算法中去,在每次仿残恋(损失函数关于 F(x)的负梯度)的训练过程中不是把所有的伤残途都用来训练。而是随机地选择一部分用来训练。就是回归树的随机梯度 Boosting 請法, 患后得到的模型是一些问证的抢娃状命。即

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n T_n(x)$$
 (6-22)

其中, $T_n(x)$ 是一棵回归树; a_n 是线性组合的系数。这种方法具有回归树的统计性质, 而且通 % 出进棚间归椒桶涮的糖度更高。

6.2.1 CRAT 树的生成

构建一颗回归树的基本方法是寻找这样的一些分割。即它们逐次将数据分成两个结点,每一结点中的,值尽可能地一张。更具体地说,假设有一个分化,形式为 z₁ < C、它将一部分样本分进右边结点。当然还有其他的分割,比如说 z₂ < B, 为了比较这两种分割的优劣,必须定义拟合损失准则 LDF(lack of fit),通过比较分割前后的 LDF, R 出端不需要分割。如果需要分割,则途择最优的分割。最优是指在所有的变量以及每一个变值可能取的分割点。通常是样本中出现的该变量的值)中,选择使得 LDF 最小的那个变量及对成分割点。算法 6-5 表明了这种通归自分算法,其中

$$H[\eta] = \begin{cases} 1 & (\eta \leq 0) \\ 0 & (ikh) \end{cases}$$
(6-23)

表示阶梯函数。

算法 6-5 的第一行相当下榜初始 F 区域当作整个取值空间、第一个循环就是直复 M_m 次分割,德次分割产生一个最优的基函数。因为每次循环只是在某一个中结点分出两个叶结点,所以叶结点个数,用面 3 个循环寻找最优的基函数,即最优的分割变量 z_i 和分割点 t^* 。找到之后,对应的基函数 B_n · (也就是进行分割的结点)用 B_n · 和 $H[-(z_i-t^*)]$ 的张积(也就是分出的左叶结点)代替,而且产生一个新的基函数 (4π) 计简单记录 (4π) · 和 (4π)

由算法 6-5 得到的基函数

$$B_n(x) = \prod_{k=1}^{h_n} H[s_{bin} *(x_{n(k,n)} - t_{bin})]$$
 (6-24)

其中; K. 就是分割的次数; s... 取值只能是±1,表示左右结点; v(k.m)是进行最优分割的变量; t... 是相似的分割点。图 6-1 是一棵简单的二叉树,形象地表示了最后所得的基函数。递 申自分算法也就是二叉树的建立过程,中间结点对应阶梯函数,从根结点到叶结点的所有阶梯 函数的张积就是基函数。

分类树和回归树所采用的 LOF 是不同的, CART 更适合分类问题。分类树和回归树 LOF 最基本的思想是计算落入两个叶结点的数据的"纯度"以及单独一个结点的"纯度"。怎样衡量

```
B;(x)-1
 2
      For M = 2 to M __ do: lof* - ∞
           For m = 1 to M = 1 do.
 3
 4
                For v = 1 to n do-
                     For t ∈ | x., | B_ (x.) > 0 |
 4
                        g \leftarrow \sum_{i,z=a_i} B_i(z) +
 6
 7
                          a_n B_n(x) H[+(x_n-t)] + a_n B_n(x) H[-(x_n-t)]
                           noin LOF(g)
 2
                        m# lot < lot* . W lot* + lof:
 0
10
                      m*+miv*+vit*+t
11
                 and for
12
           --- t--
      end for
13
      B_{H}(x) \leftarrow B_{H}(x) H[-(x_{s} - t^{*})]
      R_{m}(x) \leftarrow R_{m}^{*}(x) H[-(x_{n}^{*} + x^{*})]
15
     复注结查
```

算法 6-5 CART 的港归自分算法

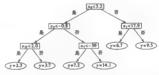


图 6-1 CART 同归树的一个例子

6.2.2 树的剪裁

树的剪裁的关键就是构造一种与树的生成不同的 LOF,这样才可能把两个结点合并成一个结点。为了便于说明,令了,表示以结点:为根结点的。又于树,决,表示。又树的所有叶结点条色,(1)表示结点:作为叶结点的损失,也就是落人结点:的数据不一定是样本,因为有的剪裁方法预留检验数据以度量损失。LOF 就是比较以结点:为根结点的二叉子树了,的损失,(7,)和以结点:为时结点的损失,(1),如果,(7,)> r(1)则把结点:的两个分枝都剪做,使得结点,成为叶结点:否则,保留于树了。一工又于树了,的损失就是它的所有叶结点的损失的加及总和,有的剪数方法认为复杂的模型也是损失,所以在二叉子树的损失中加入它的叶结点必数。剪裁的方向是与树的生成方向相反的,树的生成是从顶层逐次到底层。而树的剪数一般是从底层逐次到顶层。有的方法为了提高计算速度,剪裁从上至下进行。以下简单介绍几种剪物方法。

1. REP(reduced error pruning)剪載

这是最简单的剪数方法。它预留 - 部分数据当体检验数据、相似中结点损失都以检验数据 为准、即落人读中结点的检验数据的高数性疾量,二叉子树了,的损失就是它的所有中结点的 损失的加权总和。为了避免从上签下的剪藏,这种方法规定,只有当二叉子树了,的所有子树 的损失都大于它本身的损失时,该子树才可以被剪裁。这种方法最大的优点就是计算复杂性 与生成树的结点数成线性关系,因为每个结点只被计算一次损失,缺决是全剪数的时候没有考 您用来训练的样本,尤其当训练样本量远大于检验样本量时,很费了很多的信息,损失的估计 偏差是很大的。

2. PEP(pessimistic error pruning) 剪載

这种方法没有预留一部分数据当作检验样本,所有数据都被用来生成树以及萝菔树。如 果还是采用问样的 120°,不可能在问样的规则下版能增加,以能增加,则必须橡皮损失 的估计方法。该方法商单地参递覆刨的复杂度,认为一个叶结点的损失验户12。所以二叉子 树了,损失就是它的所有叶结点损失的加权总和并加上它的叶结点个数的一半。而且为了提 高剪裁速度,该方法是从上至下的,如果一个结点被责我。它的所有子树不用再考虑。这种方 法简单地认为增加一个结点的损失是个常数,对于有些数据是合适的,大部分是不适宜的,因 为模型多项度的损失没有考查样本,而且没有操作。

3. CEP(critical error pruning)剪載

这种方法也没有预割数罄当作检验样本,它设置 一个關值,只有当子树 7. 报失与结点, 成为叶结点时损失之差小于阈值,该子树才被剪裁,结点。成为叶结点。这种方法非常类似设 置阈值停止柯的生成。但是该方法是从下至上的,如果在结点,请走旁救条件,然而存在它的 一个子结点不偏足剪数条件,则结点,《不被剪裁》,柯的生成从上至下,如果在结点,《不满足分割条件,后面就不再有子树生成。剪裁的力度悬然由阈值改定,为了选择合适的阈值,首先选 择,列递增的各选阈值,对每一个阈值都进行一次剪裁,得到一系列子树,然后再根据另外的 推则洗择。提合适的树。

4. CCP(cost complexity pruning)剪載

这是 CART 的剪裁算法,主要有以下两步:

①依照一定的规则建立生成树 T_{mn} 的一列只由某个参数决定的子树,即 $\{T_{mn}(a_0), T_{mn}(a_1), \cdots, T_{mn}(a_t)\}_0$

②在以上子树列中按照 · 定方法洗择最优的 - 裸子树。

在第一步中,参数 α 可以看作增加一个叶结点带来的损失,即 $\alpha = (r(t) - r(T_t))/(1.87_t + 1)$

在 CCP 剪裁中认为这个值是需数 1/2、这样使得模型没有弹性。 a 值越大,剪裁掉的核时越多,最后得到的树趋于根节点;a 值越小,生成柯剪裁得越少。 所以目标就是根据不同的样本选择一个恰当的 a 值 使用的方法是选择一列递增的 $[a_s, \cdots, a_c]$,依次生成树 T_m (丸),剪裁过程中选择值 α 为 a。 第二步就是从生成的子树列中选择一棵最好的子树,也就是确定最优的 a 值,目标正是真实损失最小,有两种方法可以采用,第一种以检验像估计宣常部尺,第二种能是全支证等。

在交叉延实中,训练样本 X 被分成 $_{0}$ 个不相交的部分 x_{1} , \cdots , x_{n} 每一部分样本 X - X , 德 立 · [機輔助何 T , 起共建立 $_{0}$ / 機輔助何,全部样本建立前 T_{max} 。同样依照前面的步骤,对于每 中機輔助何都产生一列剪裁何 $[T(a_{0}), \cdots, T(a_{k})]$, 并利用 $[T(a_{0}), \cdots, T'(a_{k})]$ 的損失估计 剪裁 树 T_{max} (a_{n}) 的真实損失。更 輔軸 地 说。 假定估计 T_{max} (a_{n}) 的真实損失 等于 $T'((a_{n}, a_{n})^{1/2})$, \cdots , $T'((a_{n}, a_{n})^{1/2})$ 的真实損失,所以 T_{max} (a_{n}) 的真实損失 估计 T^{max} T^{max}

5. EBP(error besed pruning) 剪業

这是有名的 C4.5(J.R. Quinlam, 1993)的剪數方法,它是 PEP 方法的改进,其对真实的极失更悲观,样本全部用来生成树以及剪或树。与PEP 不同,EBP 从下至上通历生成树了。EDP 从下至上通历生成树了。EDP 从下至上通历生成树了。EDP 从下至上通历生成树了。EDP 从下至结点,年说,到底是剪鍊板还是缠接板块于子树,广的损失。由克中时结点后的损失和以,中对结点,少为根结点的子树了。的损失的最大值。因为每个非中结点都有两个子结点。如果子树了。的损失最小,则保留结点,如果,成为叶结点后的损失最小则担,即两个分核都剪数,否,的损失最小的。1的 F结点,产费相应的子树移到结点,的包室。需要解决的问题还是叶结点被失的估计问题。EDP 对损失更悲观,估计时结点,自的损失,(1)为生成树时的损失的置信上限。便定落人叶结点,自约样本的产度(独对时线人的损失,作)为生成树时的损失的置信上限。便定落人叶结点,自约样本的产度(独对时线人的损失)的置信上限。同样,二叉子树了,的损失效是它的所有叶结点的损失的概念的损失估计)的置信上限。同样,二叉子树了,的损失效是它的所有叶结点的损失的概念的

6.2.3 MARS

回归树最致命的缺点就是最后的高数在边界处是不连续的,这很大程度上影响准确性。 斯坦福大学著名统计学教授 L. Frickman (1991 年)提出 MARS (multivariate adaptive regression splines)方法。为了确保偏致的连续性, MARS 修改了递归自分算法(第注 6-5)。 递归自分算法 产生函数不连续的根源或是阶梯函数的张积作为基函数,如果在递归自分算法 6.14.15 行中 将所有的阶梯函数换成同样参数的连续函数,则最后函数也是连续的。由于递归自分同样条 函数类似,将阶梯函数换成相应的样条函数的 q 次幂的戴尾基函数。为「保证左右分割,采 用周功的 a 次寫的最早基础

$$P_{(x)}^{(q)} = [\pm (x-t)]_{+}^{q}$$
 (6-25)

$$B_n^{(q)}(x) = \prod_{n=1}^{K_n} [s_{lm}(x_{r(k,n)} - t_{lm})]_+^q$$
 (6-26)

以及更低次幂一元样条基函数的张积,上式中 s_{la} 取值只能是 ± 1 , $x_{r(1,n)}$ 表示自变量 x 的第 v(k,n) 个分景。此 就是一个分点。

回归树另一个缺点就是对一些简单的函数不能提供很好的通近,如最简单的线性函数或 者累加函数,这是因为回归树中的基础数变量向空气作用很强。前线性函数或者累加函数没有 交互作用。递归自分算法(算法6-5)的主聚目的是从大量的高数中选择一部分作为基高数、 最后得到的模型级是这些基面数的组合。其实分布 5 与这些基础数张成的函数空间的平均距 或就是模型的确。估计的方差与基础数的个数或正比。为了提高精度,这样的基础数定该尽是 接近真实函数, 5 且基函数个数成或比较少。递归自分算法 "次劃除一个基函数,产生两个交 定作用更强的基础数(没有选择重复的变量,交互作用社会减弱。 总的来说,递归自分算法得到的基础数的平均交互作用有递增的趋势,但有些函数的交互作用 根羽甚至没有。递归自分算法(算法6-5)的另外一个不是做是可能选续的选择同一个变量作 为分割变量。当 9 - 0 时,产生局部累加效果,增强了回归树的适应性。但是当 9 - 0 时,该变 量在基函数中的幂次就会大有。而且同一个变量的不同分割的张积最好是不同变量的分 条函数。所以为了确保得到的基础数是样条基础数、得到基础数的张积最好是不同变量的分 第,并且每一个变量的解决、

总之、MARS 在二个方面橡放通归自分膏法(算法 6-5)作为前向專法(算法 6-6),其中重要 的是模型连续阶数,也就是 q 的确定,这需要综合与建统计和计算代价两个方面,通常令 q = 。前向算法橡放内容如下:

- ①令截尾样条基函数[±(x-t)];代替阶梯函数 H[±(x-t)];
- ②每次分割之后,不删除父结点 $B_{n^*}(x)$,而且在下一步搜索过程中包括它和它的两个基

减数:

③限制每个基函数的张积是不同变量的分割。

```
R.(x)-t.M-2
2
      Loop until M > M .... : lof + - -
3
           For m = 1 to M-1 do:
4
                For v # [v(k,m)| 1 = k = K_m do:
                         For t ∈ | x<sub>e</sub>( B<sub>e</sub>(x<sub>t</sub>) > 0|
5
                         g \leftarrow \sum a_i B_i(\pi) +
6
7
                           a_nB_n(x)[+(x_n-t)], +a_nB_n(x)[-(x_n-t)],
B
                      lofo mine, ..., e, LOF(g)
0
                      扣果 lof < lof*。则 lof* ← lof;
                      m * - m; v * - v; t * -1
16
11
                 -d 6-
12
           and for
12
      and for
       B_{H}(x) \leftarrow B_{m} \cdot (x) [-(x, \cdot -t^{*})].
       B_{w,1}(x) \leftarrow B_{w} \cdot (x) [+(x,*-t*)],
15
16
       M ← M ∧ 2
17
      end Loop
       首非结合
19
```

算法 6-6 MARS 的前向算法

1.后向算法

同回归树一样,前向算法(算法6-6)得到的基函数过多,产生过度似合的现象。为了得到 合适数量的基函数,同时常要剪裁,MARS 的后向算盐可完成这个功能。由于前向算法得到的 "区域"并不是不相加的,而是可能存在重叠部分,移去一个基函数不会在自变量取值空间中产 生一至洞"(只要 B, 不被删除),所以不必一次删除两个基函数,在回归的子集选择中一次移去 一个车辆。算法6-7就是MARS的后向算法。

后向算法第一行初始化模型的基函数为前向算法得到的所有基函数,外层的循环一次剩除一个基函数,内层的循环在剩下的基函数中选择某个基函数被删除。注意到 B,(x)从来没有被剔除。后向算法得到 M_m—1个模型序列,后一个模型总比前一个模型的基函数个数少 1.量好的模型就是 J。由前向算法和后向算法得到最终模型就是

$$\hat{F}(x) = a_0 + \sum_{k=0}^{M} a_m \prod_{n=0}^{K_n} [s_{kn}(x_{n(k,n)} - s_{kn})], \qquad (6-27)$$

2. 罐型的洗板

MARS 前向、后向算法中需要确定的是 LOF 以及最大基函數个數, LOF 实质是基于样本估计直车相失。 J. Fredman (1991)采用的 LOF 是广义交叉证实(CCV)、即

```
1' = 1.2.... M_ : K*+1*
       \mathsf{lot}_* \leftarrow \mathsf{mun}_{\{e^i\} i \in I}, \mathsf{frok}(\sum_i \circ \alpha^i B^i(x))
      For M = M ... to 2 do: b - 0: L - K
4
             For m = 2 to M do: K + | m |
               lof \leftarrow min_{\{a_k\} l_k \in K} | LOF(\sum_{a_k} B_k(x))
6
                         無限 lef < b、側 b ← left K * ← K t
7
                         如果 lef < lef*、则 lef* *-lef; J* *-K;
8
             end for
۰
       and for
10
      管验结束
```

無扶 6-7 MARS 的后向算法

$$LOF(\hat{F}_{N}) = GCV(M) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} [\gamma_{i} - \hat{F}_{N}(x_{i})]^{2} / [1 - \frac{C(M)}{N}]^{2}$$
(6-28)

LOF 明显与基函数个数 M 有关,广义交叉证实就是线差平方和均值乘以模型复杂度的惩罚, 總复杂的模型会导致更大的标准误。如果模型基函数的参数(张积因子个数 K_a,分割变量 (k, m),分割点; t_s以及符号 t_{sm})已知,由样本最小化 LOF 就能得到 | a₀, ···, a_M | 的估计。复 金度惩罚温数键是

$$C(M) = \operatorname{trace}(B(B^TB)^{-1}B^T) + 1$$
 (6-29)

式中 B 是 M × N 阶矩阵,且 B_a = B_a(X_s)、C(M)等于式(6-27)中线性独立的基函数个数、而且 C(M)就是参数的个数。MARS 反复利用样本构造足够多的基函数,这就减少了模型的偏,同 时由于引进额外的参数增大了模型的标准设。模型偏的减少直接表示为残差平方和均值的减少 (次(6-28)的分母)。另外一个能够反映该事实的复杂度惩罚函数是

$$\tilde{C}(M) = C(M) + dM \tag{6-30}$$

其中 C(M)就是式(6-29)、M 是非常數的基面數个號、常數 d 表示对每一个基面數优化的代价,是算法的平滑命數、很大的 d 会导致极少的分割,最终的模型很平滑。在一般的广义累加機型中,J.H. Friedman (1999)建设的 d 值是 2。MABS 附加一些策略數可以得到累加模型,MARS 比累加模型有更多的优化参数。为了反映这个事实, d 值应该大于 2。 d 值的选择可以 看作模型的平滑程度的选择。标准的基于样本的方法如自助法(boostap)以及交叉证实均可以 法卷集、额相模和参明 d 信息接到检查证明生无差。自有以下分录。

- ①广义交叉证实式(6-28)中的 C(M)是 M 的单增函数且一阶导数逐次减小:
 - ②最有效的 d 信長 3:
 - ③M、N、n 以及自变量的分布不影响最有效 d 值的选择;
- ④在所有模拟情形中,最有效的 d 值在 2 和 4 之间;
 - ⑤如果 2≤ d≤4,模型的真实損失变化不大;
 - ⑥MARS 最后模型的广义交叉证实式(6-28)得分与 d 的取值中等相关。

从最后两条来看,MARS 得到的最后模型的精度(考虑真实很失)基本与 d 无关,但是以最 后广义交叉证实得分作为评价模型精度的标准,则最致模型与 d 有点相关。为了得到更好的 模型精度,可以采用再抽样技术。M 一座该比最优模型基面数个数 M "大,一个好的建议是 M — 2M"。

3.连续的阶数

$$b(x|x,t) = [x(x-t)],$$
 (6-31)

MARS 用一阶导教连续的截尾三次函数

$$C(x|s=+1,t_{-},t,t_{+}) = \begin{cases} 0 & (x \le t_{-}) \\ p_{+}(x-t_{-})^{2} + r_{+}(x-t_{-})^{3} & (t_{-} < x < t_{+}) \\ x - t & (x \ge t_{+}) \end{cases}$$

$$C(x|s=-1,t_{-},t,t_{+}) = \begin{cases} p_{-}(x-t_{-})^{2} + r_{-}(x-t_{+})^{3} & (t_{-} < x < t_{+}) \\ p_{-}(x-t_{-})^{2} + r_{-}(x-t_{+})^{3} & (t_{-} < x < t_{+}) \end{cases}$$

$$(6-32)$$

其中 : <!<!..今

$$p_{+} = (2\epsilon_{+} + \epsilon_{-} - 3\epsilon)^{2}(\epsilon_{+} - \epsilon_{-})^{2}$$

$$r_{+} = (2\epsilon_{1} - \epsilon_{+} - \epsilon_{-})^{2}(\epsilon_{1} - \epsilon_{-})^{2}$$

$$p_{-} = (3\epsilon_{-} - 2\epsilon_{-} - \epsilon_{+})^{2}(\epsilon_{-} - \epsilon_{+})^{3}$$

$$r_{-} = (\epsilon_{+} + \epsilon_{-} - 2\epsilon)^{2}(\epsilon_{-} - \epsilon_{+})^{3}$$
(6-33)

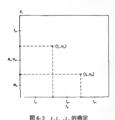
则 C(x|s,t..t,t.)连線并且一阶导數连線,在点 s=t, 处二阶导數不连線。每一載尾线性函数式(6-31)只有一个分割点,而三次藏尾函数式(6-32)、式(6-33)存在三个分割点:中间分割点t, 忘石分割点t。图 6-2 比较了这两种函数。

由前向算法和后向算法得到的基函数的每一个因子式(6-31)用三次鐵尾样条函数式(6-32)、式(6-33)代替·最后的模型就会存在连续的一阶号数。 中间分割点 : 还是原来一次载尾 华条函数的分割点或(6-31),左右分割点连接接得二阶号数 不连续的点景少。 MARS 是如下选择的、对于式(6-27)中的每一个基函数 m 有一个分割点集 [4m],对应者变量集合 [v e l, m) [5-. 把每个自变量 **c(s, m) 看作空间的一根轴,则对应的分割点载是该轴的坐标,所以分割点集 [4m] 就是 区、维空间的一个点。格所有 区、相同的基函数对应的分割点集 [4m] 投影到 R-空间,每根轴上分布一些点,这些点就是对原变量的三次振尾差函数的中间点 z, 相邻的两个点的中点既是一个函数的 z, v 是另一个函数的 r。 最小或最大的点 r 不会和其他点相 邻、对应的。或 z, 就是它和轴的最小值或最大值的中点。虽然有者相同变量个数的基函数





图 6-2 一次与三次截尾样条函数比较 (a)一次截尾样条函数;(b)三次截尾样条函数



影,确定完 1.1、1,之后,写回三次截尾函数时将 变置换成 x,或者 x,即可。图 6-3 演示了这种方 法。点 t,对于基函数的页献和点 t是一样的,而是 在边界处比线性截尾函数有着更好的性质。最重 要的就是每个基函数的单变量因子的斜率不会超 过 1。

的变量并不一定相同,如 B, 只与变量 z₁、z₂ 有关, 而 B, 与 z₂、z₄ 有关,但这并不影响在 R² 空间的投

4.分割点优化

MARS的前向算法通过单变量的平滑公式的张 积构成基函数,得到的模型式(6-27)可以看作以下 形式:

$$\hat{F}(x) = \hat{F}_{av}(x) + B_{av}(x)\phi_{av}(x_{v})$$
 (6-34)

其中

$$\hat{F}_{m}(x) = \sum_{\substack{Y \in I(m, Y(n)) \\ Y \in I(m, Y(n))}} \alpha_i \beta_i(x)$$
(6-35)

 $V(m) = \{v(k,m)\}_{k=1}^{K}$,表示第 m 个基函数对应的变量集合。且函数

$$\phi_{\infty}(x_s) = c_0 + \sum_{i=1}^{J} c_j [s_j(x_s - s_j)]_+$$
(6-36)

令
$$R_m = y - \hat{F}_m$$
,则优化可写成
 $E[R_m - B_m \hat{F}_m]$ (x .)²] = min

(6-37)

多元问题就简化到一元的情形,如果固定系数 | a, l,则式(6-37)的解就是

$$\phi_{\infty}(x_r) = E \left[B_{\infty}^2 \left(\frac{R_{\infty}}{B_{\infty}} \right) |x_r| \right] / E \left[B_{\infty}^2 |x_r| \right]$$
(6-38)

即关于 z_n 的权重为 B_m^2 的加权平滑 R_m/B_m

MARS 前向第法选取每一个非零权重的观腾值购定分照点。J.H. Frichman (1989) 指出, 这 特会导致线性平滑只有一个观腾值的部最小区间, 如果样本存在赚音, 则画数估计的局部方, 差很大。由于真实函数 f.并不可如, 当然也无法计算噪音的正负。 選客 優足真实函数比噪音 更平滑, 所以在平滑公式中附加一个最小区间, 使得在现差中出现的噪声不敏感。在分片线性 平滑中就是两个分割点之间(非零权重)观腾值的最小个数 L. 对于对称的误差分布, 大于零和 小干零的概率概备。12.6 Kt 版 L = L** (2.5 L**) 就是

$$P(L^*) = a (6-39)$$

其中, $P(L^*)$ 是 $_{RN_a}$ 次投擲硬币中出现游程(即连续出现正面或者反面)的长度大于或等于 L^* 的模率; N_a 是 $B_a > 0$ 的观测值个数; a 是置信水平, 一般取 a = 0.05 或者 a = 0.1。因为基 深教 B_a 的新分割点的可能的位置是 nN_a 个,所以投攬 nN_a 次。

当 $\alpha N_a \ge 10$ 且 $\alpha < 0$ 时, L^* 的一个较好近似为

$$L(\alpha) = -\log_2 \left[-\frac{1}{nN} \ln(1-\alpha) \right] / 2.5$$
 (6-40)

因为在每一个勝程中有 2 到 3 个分割点不会影响分片线性平滑的精度,所以式(6-40)除 以 2.5。在式(6-40)的条件下,以 1 - a 的概率保证在变量取值区间中不会连续出现正的或负 的误差。式(6-40)不能推广到区间的边界点,因为 L(a)指的是两个分割点之间的观视值个 数,而不是区间边界和最大或最小分割点之间的观测值个数,而且边界的性质对估计的精度影 响很大,必须在边界调整 L。由于一个长度大于或等于 L"的谢避在边界出现的概率为 2*L"1。n 个变量对应 n 个取值区间,所以边界出现游程的概率或是

$$P(L^*) = n2^{-L^*+1}$$

因而在最大、最小分割点和区间边界中至少需要

$$Le(\alpha) = 3 - \log_2(\alpha/n)$$

个观測值保证在取值区间不会出现游程。 $L_{i}(a)$ 和 $L_{i}(a)$ 都对 a 敏感。L(0.01) -L(0.05)和 $L_{i}(0.05)$ $-L_{i}(0.05)$ $-L_{i}$

6.2.4 Boosting ₱ Bagging

以 Boosting 獨裁训练样本東产生多个假设, 它主要包括两个系列, 即 Boost-by-majority 和 AdaBoosting。 Boosting 在训练样本上维护一套概率分布, 在每一轮选代中 Boost-by-majority 和 置取样本生成不同的训练集, 而 AdaBoosting 在每个实例上调整这种分布。在分类问题中, AdaBoosting 用成员分类器在训练样本上的情况率来调整训练实例上的概率分布。权重改变的作用是在被误分的样本上设置更多的权重, 在分类正确的例子上其权重将减小。最终分类器通过单个分类器的加权投票建立起来, 每个分类器按照其在训练集上的精度加权。 算法设计能 增强效果 差的样本的学习能力, 但是也有可能使最后的组合算法过于偏向几个特别的样本, 导致禁法不太稳定。 尤其是在样本有噪声的情况下, Boosting 的最终效果可能很差。

Boosting 方法有两种不同的使用方式,即使用带权的样本和按概率電取样本。 Quinlan. J. R (1996)通过实验发现,前者效果优于后者。 Breiman L(1998)提出 Arcing(Adaptive Resample and Combane)的概念,认为 Boosting 是 Arcing 算法族的一个特例。在此基础上,他设计出 Arc-s4 算 法。该算法在产生新的学习器时,样本的权的变化与已有的所有学习器都有关。奇怪的是,通过实验发现,与 AdaBoost 相反,按概率重取样本的 Arc-x4 优于使用带权样本的 Arc-x4。

Bagging 的基础是重复取样。它通过产生样本的重复 Bootstrap 实例作为训练集,每次运行,Bagging 邮给学习算法提供从大小为。的原始训练集随机抽取的 m 个训练样本的集合。这种说条键称作取始训练集合的 Bootstrap 复制。bootstrap 综合,即 Bagging。 平均来说,每个 Bootstrap 复制仓店原始训练集的 63.2%。原始训练集中的某些样本可能在新的训练集中出现多次,而另外一些样本则可能 " 次也不出现。 Bagging 通过重新选取训练集增加了 基础学习器集成的些异度,从而提高了 Ev 化能力。 稳定性是 Bagging 能否发挥作用的关键网索,配数时间,那是字号其故的选择度,加对稳定的学习算法就是不明显,有时基立使预测精度高低。学习算法的创造性是指如果训练集有较小的变化、学习结果不会发生较大变化。基于实例回归方法是稳定的,而决策键,神经网络等方法是不稳定的。 研究发现,一般情况下。Bagging 方法总是可以改变学习系统的性能;而 Boosting 方法在有效时效果比 Bagging 还好,但

1. AdaBoost 算法研究

为了解决原有 Bossling 算法必须知道弱学习算法学习正确率的下限的问题,Freund 和 Schapire 于1995 年提出了 AdaBoost (Adaptive Boost)算法,该算法的效率与 Freund Y. (1995)方 法的效率几乎一样,却可以非常容易地应用到实际的分类问题中。给定一个训练集(x, y, y, ..., (xs, ys), 初始化时指定每个观测值的权值为 1/N,并按照该权重调用现学习器对训练集进行训练。每次训练后,根据训练效果更新训练集上的权值,训练效果整的样本获得大权重,并在下轮中加强训练。迭代 7 轮。最终得到一个估计序列 h,, h, 每个估计都具有一定的权重,最终的估计 H 是采用有权重的投票方式获得、AdaBoost 算法份代码如算法 6-8,最终的预测 函数是

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\tau} w_i h_i(x)$$

2. Bagging 算法研究

$$h_s(x) = \operatorname{avg}_s(x, L^{(s)})$$

这种过程被称为"Bootstrap 综合"或"Bagging"。

```
U=(1/N,···,1/N)//探本的初始权宜
2
     for(j=1:j<T:j++)
3
     h:=p(x,v,U)//生成預期函数 h:
5
    em \(\sum_{\text{L}}(\v., \h(\x.)) \text{U}_1
     if(a>給定值)
     ie T
10
     w. = log((1-e)/e)//預測重数权意
      for( i = 1: i < N: i + + )
11
12
          if(h_1(x_i \neq y_i))
            U. = U.(2a)//編纂經本权意
13
14
15
        D = D/(2(1 = e))
16 foo(imlyic Nyina)
17 U<sub>i</sub> = U<sub>i</sub>/ \(\sum_i\), U<sub>i</sub>//使\(\sum_i\), U<sub>i</sub> = 1
18
```

算法 6-8 AdaBoost 算法

6.2.5 梯度 Boosting

轉度 Boosting 不同于 AdaBoost, AdaBoost 算法改变样本的权值,但并不改变样本本身。轉 度。转度 Boosting 算法改变样本但并不改变样本权值,还有一类 Boosting 算法同时改变样本和样本权值。轉度 Boosting 算法改变样本的方法主要来票于数值优化中的最速下降法。

假设求解最优化问题

$$P' = \arg \min \Phi(p)$$

其中 $\Phi(p)$ 是多元参数 p 的病数、最適下降法是数值优化中最简单又最重要的一种方法、它从 参数空间的任一个初值 p,开始,每次在当前位置 p。,使得高数 $\Phi(p)$ 值在下降最快的方向上 精动一点点、风雨量后达到局部最优点。可以证明,最适下降方向就是收点的梯度方向

$$g_{n} = |g_{jn}| = \left[\frac{\partial \Phi(p)}{\partial p_{j}}\right]_{p=p_{n-1}}$$

的反方向,其中
 $p_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} p_{i}$
鄉 亦步就是 $-\Phi_{n}$,且

 $\rho_n = \arg \min \Phi(\rho_{n-1} - \rho g_n)$

所以

$$p_m = p_{m-1} - \rho_m g_m$$

在回归或者机器学习问题中,所搜索的空间是函数空间,不是欧式空间。空间中的每一个点都是一个函数。优化函数还是采用起验损失函数式(6-6),按照最速下降的步骤,假定搜索空间, $F(x) = \sum_{i=1}^{r} h(x; \rho) 是一些基函数 <math>h(x; \rho)$ 的线性组合、 $h(x; \rho)$ 由参数 β 确定。 $h(x; \rho)$ 可以是任何形式的不稳定的函数,但是考虑到回到柯的优良性质,而且同归柯是不稳定的。这 里捷斯基高级 $h(x; \rho)$ 为回归朝 T(x)。 榜席 Boosting 算法如算法 6-9。

算法 6-9 梯度 Boosting 算法

算法 6-9 中第 1 行初始化函数为常数函数 0.2-7 行循环 M 次,每次循环得到一个预测函数 $F_{n-1}(x)$ 。 第一次循环预测函数是 $F_a(x)=0$,以后的就是前 m-1 模糊的线性组合。 4-5 行就是建立一模树 $T_a(x)$ 以及相应的组合系数 $a_a(x)$,然后增加到当前的线性组合 $F_{n-1}(x)$ 、得到的预测函数 $F_a(x)$ 就是下一步循环的初始函数。 在第一步中,因为 $F_0(x)=0$,所以 $a_1T_1(x)$,就是简面介绍的标准的回归树建立方法。 第二步,最优的树 T_1 以及组合系数 a_1 增加到 $T_1(x)$,所以 $F_2(x)=a_1T_1(x)+a_2T_2(x)$ 。 这个过程重复 M 步,最后的模型就是 M 裸树的线性组合。

梯度 Booting 算法的潜在困难就是每一步怎样建立最优的回归树,损失函数在 $F(x) = F_{n-1}(x)$ 的梯度

$$g_{n}(x_{i}) = \left[\frac{\partial L(y_{i}, F(x_{i}))}{\partial F(x_{i})}\right]_{F(x) = F_{m-1}(x)}$$

的反方向 $-g_a = |-g_a(x_s)|^s$ 是空间 \mathbb{R}^n 的 $- \cap f_a$,而且不能推广到其他的 x,不能形成 x 的 函数。一个自然的推广就是利用仍残差 $|y_s = -g_a(x_s)|^s$ 构造回封荷 $T_a(x)$ 。即特算法 6-9 第 $4 \sim 5$ 行分成两步,首先利用样本 $|x_s,y_s|^s$ 建立一棵回归树 $T_a(x)$,然后一维搜索

$$a_m = \arg\min \sum_{i=1}^{N} L(\gamma_i, F_{m-1}(x_i) + aT_m(x))$$

这样避免了直接搜索函数空间,充分利用了回归树算法,解决了数值搜索的困难。

在回归树的建立过程中,由于剪裁算法是假定最后只选择一棵树,而 Bossting 通常包含上百棵树,不必剪裁出租对一棵树最优的回归树,所以在每次循环中固定回归树的叶结点个数为 5.1 一般较小,但不能太小,典型的选择是 4 < J < 10 闪 现 独特位中 表現得很好,只要 4 < J < 10 预测精度 也相当整理

回归树可以写成以下累加形式:

$$h(x; |b_j, R_j|_1^j) = \sum_{i=1}^{J} b_i I(x \in R_j)$$
 (6-41)

|R,|| 是自变量 x 取值空间的一个不相交的分割,由二叉啊的叶结点确定。所以梯度 Boosting 電床就長

$$F_{n}(x) = F_{n-1}(x) + \alpha_{n} \sum_{i=1}^{J} b_{i} I(x \in R_{p_{i}}) = F_{n-1}(x) + \gamma_{p_{i}} I(x \in R_{p_{i}})$$
 (6-42)

其中: $\gamma_{j_1}=a_nb_{j_1}$: $\{R_{j_1}\}_{j_1}^f$ 是第 m 次循环的自变量空间分割: $\{b_{j_1}\}$ 是落入区域 R_{j_1} 的 γ_i 的均值 即

$$b_{jn} = \underset{x_i \in R_n}{\text{avg }} y_i$$

式(6-42)就是在每步循环中加入J个阶梯基函数 $|J(x \in R_{p_i})|_{J=1}^{J}$,而不是仅仅一个基函数。所以 $\Pi U = W = 2$ 定次此阶梯基系数的量作系数来摄高视合的质量。即

$$\{\gamma_{j_n}\}_{j=1}^{J} = \arg\min \sum_{i=1}^{N} L(\gamma_i, F_{n-1}(z_i) + \gamma_j I(z \in R_{j_n}))$$

由于分割区域是不相交的,还可进一步简化为

$$\gamma_{j_0} = \arg \min \sum_{x \in S} L(\gamma_i, F_{n-1}(x_i + \gamma))$$
 (6-43)

这就是每一个叶结点确定的区域的最优取值,给定函数 $F_{n-1}(z)$, γ_{μ} 完全取决于損失函数 L_0 对于绝对损失函数、式(6-43)就是

$$\gamma_{jn} = \underset{x_i \in A_m}{\operatorname{median}} \{ \gamma_i - F_{m-1}(x_i) \}$$

系数 γ 就是第 π 次循环落人第 j 个叶结点的伪残差

$$\tilde{y}_{i} = -\left[\frac{\partial L(y_{i}, F(x_{i}))}{\partial F(x_{i})}\right]_{x_{i} = x_{i}} = sign(y_{i} - F_{m-1}(x_{i}))$$
(6-44)

的中位数,伪残差就是当前残差 $y_1 - F_{n-1}(x_1)$ 的符号,这使得计算异常简单。整个绝对损失 函数的回归树的梯度Boosting算法如算法 6-10 所示。

```
1  F_{N}(x) = \operatorname{modian} |\gamma_{1}|^{2}

2  f_{N}(-n = 1; n \in M; n + +)

3   f_{N}(-n = 1; n \in M; n + +)

3   f_{N}(-n = 1; n \in M; n + +)

1   f_{N}(-n = 1; n \in M; n + +)

2   f_{N}(-n = 1; n \in M; n + +)

3   f_{N}(-n = 1; n \in M; n \in M;
```

算法 6-10 绝对损失函数的梯度 Boosting 算法

这种算法是极其稳键的,回归树的建立只是自变量 z,的次序信息,并且伪残差 y,取值只 是 ± 1。叶结点的改变只与中位数有关。另一种建立回归树的方法是直接最小化绝对损失函 数,即

$$\operatorname{tree}_{n}\left(\,x\,\right) = \arg\,\min\sum_{i\,=\,1}^{N}\,|\,y_{i} - F_{n-1}\left(\,\mathbf{x}_{i}\,\right) - \operatorname{tree}(\,x_{i}\,)\,|\,$$

$$F_n(x) = F_{n-1}(x) + tree_n(x)$$

由于式(6-42)中分割区域的确定过程中采用的是平方很失函数。而在搜索分割变量以及分割 点时、最小二乘估计比绝对损失速度快很多。所以式(6-42)的计算速度比直接最小化绝对损失 感動性很多。

对于不同的損失函數,其梯度是不同的。仍規差也略有差别。常用的平方損失 $L(y,F) = (v-F)^2$ 的低稅差v=v-F , (x) , m Huber 指失函數式(6-2)的低稅差易

$$\bar{y}_i = -\left[\frac{\partial L(y_i, F(x_i))}{\partial F(x_i)}\right]_{P(x) = F_{-1}(x_i)} = \begin{cases} y_i - F_{n-1}(x_i) & (|y_i - F_{n-1}(x_i)| \le \delta) \\ \delta \cdot \operatorname{sign}(y_i - F_{n-1}(x_i)) & (|y_i - F_{n-1}(x_i)| > \delta) \end{cases}$$

而 Ingistic 损失函数式(6-4)的伪残差就是

$$\frac{1}{y_i} = -\left[\frac{\partial L(y_i, F(z_i))}{\partial F(z_i)}\right]_{P(z) = F_{m-1}(z_i)} = 2y_i/(1 + \exp(2y_i F_{m-1}(z_i)))$$

一维搜索系数

$$\gamma_{j_n} = \arg\min \sum_{z_i \in R_{j_n}} \log(1 + \exp(-2\gamma_i (F_{n-1}(x_i))))$$

它的一个近似就是

$$\gamma_{j_0} = \sum_{s_i \in \mathcal{B}_{j_0}} \tilde{\gamma}_{s_i} \Big/ \sum_{s_i \in \mathcal{B}_{j_0}} \|\tilde{\gamma}_i\| \left(2\|\tilde{\gamma}_i\|\right)$$

由于两类 logistic 回归第 m 次循环中的经验提失函数

$$\phi_{n}(a; T_{n}(x)) = \sum_{i=1}^{N} \log[1 + \exp(-2y_{i}F_{n-1}(x_{i})) \cdot \exp(-2y_{i}aT_{n}(x_{i}))]$$
 (6-45)

如果 $y_i F_{n-1}(x_i)$ 充分大,则 $aT_n(x_i)$ 对式(6-45)的影响很小,也就是说观测 (y_i,x_i) 对损失函数 没有贡献。所以在优化的过程中可以翻去这个观测值。自然,

$$\omega_i = \exp(-2\gamma_i F_{n-1}(x_i)) \qquad (6-46)$$

可以看作第 m 次循环中等: \uparrow 元灏值对系数估计的权重。从非参数的观点来看, 很失函数关于 $F(x_i)$ 的二阶等数是观测值 (y_i, x_i) 对优化的贡献, 即第 m 次循环中第: \uparrow 个观测值对系数估计的权宜的5月9—一个背景

$$\omega_i = |\bar{y}_i|(2 - |\bar{y}_i|)$$
 (6-47)

对系数估计影响较小的观测值可以不必考虑,临界值 $\omega_t(\eta)$ 可以如下确定:

$$\sum_{i=1}^{l(q)} \omega_i = \sum_{i=1}^{N} \omega_i \qquad (6-48)$$

其中 $[\omega_{(i)}]_i^p$ 是 $[\omega_{(i)}]_i^p$ 从小到大的排序,g 集型的选择是 $g \in [0.05,0.2]$ 、 ω 、如式(6-46)或者式(6-48)定义。通常90%到 95%的规则值被删除而不会影响估计的相度,这大大地提高了运算的减度。

6.2.6 梯度 Boosting 模型的控制

即使限制每一棵树的叶绾点敷,只要树的棵敷足够大,梯度 Boosting 模型的经验损失可以 仟寬小,但是同前一样,过度的拟合会导致真实损失的增大。在开始的时候,真实损失随着 M 的增大而碳小,到达 M*时,真实损失最小,当 M > M*时,真实损失随着 M 的增大而增大,所 以 M*是最优树的棵酸。M*取决于真实函数 f. 样本量 N 和噪声 而且 M*未知,只能从样本 中估计得到。将样本分为训练样本和检验样本,利用交叉证实估计参数是可行的方法。控制 模型规模 M 的大小并不是提高预测精度的唯一方法,另一个常用的方法就是 shinkage,在梯度 Boostin 维读中(集法 6)%第6行替接近

$$F_{\alpha}(x) = F_{\alpha-1}(x) + (v \cdot \alpha_{\alpha}) T_{\alpha}(x)$$
 (6-49)

在毎一歩中估计得到的轉只有 - 部分对最終的模型有贡献,控制的因子就是 0 € v € 1。 abrinkepe 或者学习遺度参数。限制模失增加的速度、小的 v 值需要更多的树加人到模型中去。隨 机模拟表明、小的 v 值极大地提高了梯度 Boosting 算法的精度、同时增加了计算的负担。当 v € 0.1 时,精度的提高不再明显。式(6-49)的引进纯粹是先借检验。它成功的原因还是一种惩 罰的措施。假定模型包含所有可能的 J 个时结点的回归树;

$$\hat{F}(x) = \sum_{i} \hat{a}_{i} T_{i}(x)$$
 (6-50)

其中

$$\{\hat{\alpha}_n\} = \underset{n}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{N} L(y_i, \sum_{i} \alpha_n T_n(x)) + \lambda \cdot P(\{\alpha_n\})$$
 (6-51)

这就是惩罚的线性回归,式(6-51)前一项就是经验损失,后一项就是系数 $|a_n|$ 的惩罚。由于所有 J个叶结点的回归树的模数是无穷的,所以惩罚是必须的, λ 控制惩罚的力度。统计学中常用的惩罚数多修惩罚

$$P(|a_-|) = \sum_{i} a_-^2$$
(6-52)

这种惩罚也是支持向量回归用到的惩罚措施,它偏向小的系数。另一种方法是

$$P(|\alpha_m|) = \sum |\alpha_m| \tag{6-53}$$

6.2.7 随机梯度 Boosting

借助于 Bagging 的思想, 特離机选择样本作为梯度 Bosting 算法(算法 6-11)的一部分。确切地说, 在每一次循环过程中,从全部样本中随机地抽取一部分建立回归将(第 5行)以及相应的组合系数(第 6行)。令 $|y_i,x_i|^2$, 表示全部样本, $|x(i)|^2$, 表示自然数 $|1,\cdots,N|$ 的一个随机 排序,则一个随机子样本就是 $|y_{s(i)},x_{s(i)}|^2$, 且 $\hat{N} < N$ 。随机梯度 Bosting 算法如算法 6-11 所示。

当 $\tilde{N}=N$ 时,没有随机选择样本,则算法 6-11 就是算法 6-10。比例 $k=\tilde{N}/N$ 越小,紧接

$$\begin{split} & \mathbf{i} & & F_{S}(x) = \arg\min_{x \in \mathcal{X}} \sum_{i=1}^{n} L(y_{i}, \gamma) \\ & & \text{for} (n-1) n < s \, M(n) + s \\ & & \mathbf{i} \\ & & \\$$

算法 6-11 随机梯度 Boostarig 算法

着的两次循环选择的子样本不同的概率越大,整个策法的随机性也越大。由于选择那分样本, 计算的代价以比例 k 减少,但是在市次循环中使用较少样本,回归树的偏会增大。随机模拟 表明, k 最好的选择在 0.5 左右。

回归树的随机梯度 Boosting 几乎拥有回归树的所有优良性质,单楝树的最大缺点是不连续,而 Boosting 是许多柳的线性组合,所以很大程度上提高了预测的精度。 Boosting 同样极大地 減少了单棵树的不稳定性,从统计学角度来源,平均减少方差。最后 Boosting 大大减轻了单棵 柳分割的难度,每一棵小刺可以包括不同的变量,这样各种交互作用都可以体观,使得最后的模型更加融触。

6.3 赤潮的混合回归预测

本节首先建立每个影响因子的非线性回归模型,然后作总体线性回归,首次輸出了用機合 回封模型预报未需的方法。这样就改进了现有的用多元线性回归模型进行非潮预报的方法。 揭塞了未潮预报的准确性。

6.3.1 澳头水域特点及数据的量化

大量的研究结果表明。赤潮发生的控制因素主要可分为:物理因素(风、光照、气压等气象、 气候因素,沿岸流、潮汐运动,海水的垂直混合等水动力条件,海水温度,盐度等海水的物理性 质)、化学因素(普养盐、微量元素)、生物因素(赤潮生物间的竞争和互助、细菌与浮酵动物对赤 潮生物的影响)。

当然对于不同水域、影响赤潮生物生长的主要因素也不相同。 林祖李(2000) 粉研究表明, 大亚湾澳头水域污染不严重,水质状况较稳定,浮游植物种群丰富。赤潮的消长主要与水温、天 化状况(影响赤雕生物的生长等植) 和潮沙、凤向的变化(影响赤潮生物的迁移、扩散、赛集)等 物理因于关系语初。在此基础上,本节结合澳头水域 2001 年 5 月份安生赤潮期间的现场观测 数据(表 6-2),给出相应的分析结果。 即先由单因于非线性回归分析(节博成,1989),建立因子 $X_i(i=1,2,3,4)$ 和 Y 的非线性回归模型 $Y_i=f(X_i)$.然后建立 Y_i, Y_2, Y_3, Y_4 和 Y 的多元线性 回归模型、从而可以得出用于预报的混合间归模型。即

$$Y = f(X) = a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + a_3 Y_3 + a_4 Y_4 + a_0$$

$$= a_1 f_1(X_1) + a_2 f_2(X_2) + a_3 f_3(X_3) + a_4 f_4(X_4) + a_6$$

$$\not \exists f : X = (X_1, X_2, X_3, X_4)_o$$
(6-54)

harman I was a market a language of the same of the sa

表 6-2 2001年5月澳头水域各因于计算参数

日期	水温(X₁)(℃)	推沙类型(X ₂)	风向(X ₁)	天气状况(X4)	実測細胞敷(Y)
2005 - 03	23.0	2	2	2	9.01
2005 - 04	23.0	1	8	3 .	0.00
2005 - 05	23.5	1	7	4	0.00
2005 - 06	25.0	1	8	4	0.00
2005 - 07	25.0	1	7	4	0.00
2005 - 08	25 0	2	6	1	0.00
2005 - 09	25.5	2	2	3	0.30
2005 - 10	25.0	4	2	2	0.00
2005 - 11	24.5	3	2 .	4	0.17
2005 - 12	25.0	3	1	4	. 0.85
2005 - 13	25.0	4	1	4	0.98
2005 - 14	25.5	4	8	4	3.43
2005 - 15	25.5	4,	8	4	3.99
2005 - 16	25.5	4	2	1	0.42
2006 - 17	25.5	1	8	3,	1.38
2005 ~ 18	25.0	1	8	2	0.18
2005 - 19	25.0	. 1	8	2	0.18
2005 20	25.0	1	8	3	0.30
2005 - 21	26.0	2	8	4	3.50
2005 - 22	26.0	2	8	3	2.50
2005 - 23	26.0	2	7	3	0.59
2005 - 24	26.5	2	7	4	0.85
2005 - 25	26.5	3	8	4	2.86
2005 ~ 26	27.0	4	7	4	4.51
2005 - 27	28.0	3	8	4	4.55
2005 - 28	28.0	3	8	3	2.67
2005 - 29	27.5	4	7	'3	3.83
2005 - 30	28.0	4	8	2	2.85

6.3.2 相关性分析

如表 6-2,分别把实测赤潮生物细胞浓度、水温、潮汐类型、风向、天气状况记为 Y、 X_1 、 X_2 、 X_3 、 X_4 。 根据相关系数的概念, X_4 (i=1,2,3,4)和 Y的相关系数的大小(相关性的大小)反映

「 Y 的变化受 X, 的影响程度的大小。如果某因子和 Y 的相关系数比较大。就说明该因子对 赤潮的发生起到很大的促进作用。对于上述四因子作相关性分析,具体分析结果如表 6-3 所 示。

★ 6-3 各因子和 Y 的相关系数

因子	水温(∦₁)(℃)	瀬汐英型(X2)	风向(X ₃)	天气状况(X4)
相关系數	0.730 I	0 573 3	0.482 3	0.372 4

由表 6-3 可知, 水温是大亚商澳头水域赤潮发生的最主要影响因子。当然影响赤潮发生 的因實可能有很多,而不只是上述4种因素,那样就可以通过相关性分析, 从很多的影响因子 中选择出主要的影响因子,这不影响预报的准确性。在下面的分析中,将残差平方和的大小作 为概则好乐的评价标准。

6.3.3 单因子非线性回归

本节先建立单个因子 X(i=1,2,3,4)和 Y的非线性回归模型f(X,),而不是建立 4 因子 与 Y的总体的线性回归模型。这样可以消除各因子之间的影响,减小总体模型的残差平方 和.

首先考虑因子 X₁,在散点图 6-4 中,可以看出 Y 随 X₁ 变化的非线性趋势(S 形生长模型趋势)。

构告非线性回归模型、即构造 Gompertz 模型(洪再吉、1986)为

$$Y_1 = a \exp\{-\exp\{b - cX_1\}\}$$
 (6-55)

其中参数 a、b、c 未知。

作上述非线性回归,结果如表 6-4 所示。

素 6-4 非線性器白書館 a, b, c

	40. 144		
参数	4	å	e
回归结果	3 432 0	43.6367	1 717 7

由此得出 X. 和 Y 的非线性回归模型为

$$Y_1 = f_1(X_1) = 3.432.0 \text{ exp} \left[-\exp\left[43.636.7 - 1.717.7X_1\right] \right]$$
 (6-56)

由 Y_1 随 X_1 的变化趋势(图 6-4),可以看出 Y_1 与 Y 拟合得相当好。类似地,对 Y 关于 X_1, X_1, X_4 分别作非线性回归分析,结果如下:

$$Y_2 = f_2(X_2) = 0.7723X_2 - 0.4424$$
 (6-57)

$$Y_1 = f_3(X_1) = -0.0188X_3^3 + 0.3767X_3^2 - 1.8642X_1 + 2.4983$$
 (6-58)

$$Y_4 = f_4(X_4) = 1.3807(\exp[0.2240X_4] - 1)$$
 (6-59)

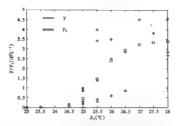


图 6-4 赤潮生物细胞浓度 Y 隨水溫 X, 变化的趋势

6.3.4 构造混合同归模型

由上述非线性回归模型,不难计算出 $Y_i(i=1,2,3,4)(Y_i$ 可以看成因子 X_i 对赤潮生物细胞液度Y的贡献),然后对Y和 Y_1,Y_2,Y_3,Y_4 作多元线性回归(茆诗松,1981)。令

$$Y = f(X) = a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + a_3 Y_3 + a_4 Y_4 + a_0$$
 (6-60)

式中 a_1, a_2, a_3, a_4 是未知的回归系数, a_0 为常数项。 把 Y 和 $Y_1(i=1,2,3,4)$ 的值代人回归方程,得出未知参数(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) = (-2.5156,0.5266,0.8500,0.8499,0.4812)。

结合 6.3.3 节的内容,构造出一个用于作赤潮预报的回归模型为

Y = f(X)

$$= 0.526 6Y_1 + 0.850 0Y_2 + 0.849 9Y_3 + 0.481 2Y_4 - 2.515 6$$

= 1.807 3exp
$$\{-\exp\{43.636.7 - 1.717.7X_1\}\} + 0.656.6X_2 - 0.016.0X_3^3 +$$

$$0.320\ 2X_3^2 - 1.584\ 4X_3 + 0.664\ 4exp[0.224\ 0X_4^2] - 1.432\ 7$$
 (6-61)

式(6-61)称为混合回归模型,显然,它是一个多元非线性模型。由此可以得出赤潮生物细胞浓度的计算值,记为 Y₆,如表 6-5 所示。

		de con thought an entire to the territory of the territor				
日期	Y	Υ ₀	日期	Y	Y ₀	
2005 - 03	0.01	-1.095 9	2005 - 09	0.30	-0.060 9	
2005 - 04	0.00	0.159 0	2005 - 10	0.07	0.461 2	
2005 - 05	0.00	-0.032 1	2005 - 11	0.17	0.164 3	
2005 - 06	0.00	0.729 7	2005 - 12	0.85	1.128 2	
2005 - 67	0.00	0.212 0	2005 - 13	0.98	3 784 6	
2005 - 08	0.00	-0.476.4	2005 - 14	3.43	3 228 9	

あんく 会当生物価助设定的计算符

					10.0	
日期	Y	Yo	日期	Y	Y ₀	
2005 - 15	3.99	3.228 9	2005 - 23	0.59	1 559 5	
2005 16	0.42	0.782 3	2005 - 24	0.85	2.176 5	
2005 – 17	1.38	0 932 9	2005 - 25	2.86	3 350 7	
2005 – 18	0.18	0.142 0	2005 - 26	4.51	3.631 8	
2005 - 19	0.18	0.1420	2005 – 27	4.55	3.585 1	
2005 - 20	0.30	0.403	2005 - 28	2.67	3.258 5	
2005 - 21	3.50	2.403 9	2005 – 29	3.83	3.369 3	
2005 - 22	2.50	2.077 2	2005 - 30	2.85	3.653 9	

为了说明拟合的效果,计算 Y 和 Y。的相关系数 r=0.916 5,这说明由混合回归模型得出的未潮生物细胞浓度的计算值和客测值最高度相关的。

下面用残差平方和的大小来判斷这里构造的混合回归模型和多元线性回归模型的好坏。 记 $Y = (Y(1), Y(2), \dots, Y(28)), Y_0 = (Y_0(1), \dots, Y_0(28)), 残差平方和定义如下:$

$$E = \sum_{i=1}^{20} (Y(i) - Y_0(i))^2$$
 (6-62)

将式(6-61)中的值代人上式得出混合回归模型的残差平方和 $E_1 = 11.313$ 4,而由林祖享 (2002)得出的多元线性回归模型的残差平方和 $E_2 = 12.627$ 8。 显然 $E_1 < E_2$,也就是说在进行赤棚预报的时候,这里的报合回归模型是一个更好的模型。 为了更加直观,作出 Y E_1 E_2 的散点阻,如图 6-5 所示。从图 6-5 可以看出赤潮生物细胞浓度的计算值与实测值有很好的拟合 趋势。战明底混合回归模型能很真实地反映出上这影响因于与赤潮形成的密切关系。

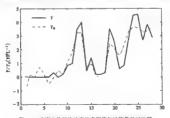


图 6-5 未测生物细胞浓度的实测值与计算值的对比图

6.4 渤海湾生态环境状况调查与评价

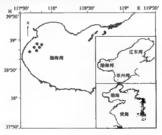
浮游植物生物量与生产力是海洋生态系统食物网的结构与功能的基础环节,是供养其摄 食者——抨游动物的物质基础,从而直接或间接电影响海区包,虾、贝等经济孢业资源的变动。 浮游植物与周围物理,生物、化学环境通过各种复杂的相互作用形成一个统一的整体,一个相 百骸曲, 牡牛生灭的生态环境至标。

渤海是一个半封闭的洩海,生态环境的季节变化显著,同时渤海周围又是一个人口相对集中、工农业生产较为发达的地区,易受人为因素的影响。特别是近些年来,渤海富营养化状况 日益严重,赤碉频繁发生,给工农业生产以及社会的可持续发展都带来很大的负面作用。因 放,开展渤海浮游植物及其相关环境因子和海域的富营养化调查研究和评价有很大的现实意 义和经济价值。

2000—2003 年,分别于枯水期(5月)、丰水期(8月)、平水期(10月)对天津近海海域生态 环境因子进行了调查,调查区域为;北纬38°36′30″~39°06′57″、东经117°39′~118°。

监测项目为:

- ①水文气象,包括风向、风速、简易天气现象、水温、水色、水深、透明度、海况;
- ②水质,包括 pH 值、盐度、溶解氧、叶绿素、化学耗氧量、磷酸盐、亚硝酸盐、硝酸盐、铵盐。
- 2003 年 5-9月,对渤海湾赤潮监控区进行了高频率(每周一次)监测,采样站点如图 6-6 所示。监测区域为·北纬 38*49′20″~ 38*54′. 东经 117*37′~ 117*50′。



倒 6.6 妥維帖位图

临濒项目为:

- ①水文气象,包括风向、风速、简易天气现象、水温、水色、水深、透明度、海况;
- ②理化要素,包括 pH 值、盐度、溶解氧、叶绿素、化学耗氧量、磷酸盐、亚硝酸盐、硝酸盐、 铵盐。

③赤潮生物,包括浮游植物细胞浓度(个/mL)、优势种及其细胞浓度(个/mL)。 气象,水文,水原,生物量监测源日及分析方法显表 6.6。

臺 6-6 维侧项目与分析方法一覧表

音标	监测项目	分析方法	采用标准
	气压	空盒气压表	GB 12763.2 - 91
	风速	风向、风速仪(表)	GB 12763.2-91
*	吳向	具向、风速仅(表)	GB 12763.2-91
à:	作業	道风干爬表、温度计	GB 12763.2 - 91
34	適明度	透明度靠(水下無度计)	GB [7378.4 - 1998
R.	水色	水色计	GB 17378.4 - 1998
	梅况	海浪及海流目測	GB 17378.4 - 1998
	水温	類側組度计	GB 17378.4 - 1998
	pH OIL	笔式 pit 计、pit 电位计	GB 17378.4 - 1998
	故度	电导法 折射式盐度计	GB 17378.4 - 1998
环	溶解質	测復计、碘量法	GB 17378.4 - 1996
Ř	化学耗氧量	親式高锰酸钾法	GB 17378 4 - 1998
쩐	活性磷酸盐	确钼酸法	GB 17378.4 - 1998
子	美銷酸盐	重氮一偶氮分光光度法	GB 17378 4 - 1998
	銷酸盐	. 锌镍还原法	GB 17378.4 - 1998
	镀盐	次溴酸盐氧化法	GB 17378 4 ~ 1998
4:	押游植物种类及数量	个体计数法	GB 17378.7 - 1998
#o	浮游动物种类及数量	个体计数法	GB 17378.7 - 1998
因	底栖生物种类及数量	个体计数法	GB 17378.7 - 1998
子	叶绿素	荧光分光光度法	GB 17378.7 - 1998

6.4.1 渤海湾海水理化因子时空分布及变化

1.海水温度

海水温度是海洋环境中最为重要的生态因子。水温对浮游生物的生活起着重要的作用。 在适当的温度范围内、温度的升高将加速生物的新陈代谢与蒙殖。

渤海湾是一个半封闭的海湾、三面环航、气温的日差和季节差较为明显、再加上渤海湾与 外的水体交换能力较差。水深较茂、原以水温受气温的影响较大、有较明显的大陆性和季节 性。根据调查管料分析、流水水温与气温有较明显的相关关系。

图 6-7 为 2003 年 5-9 月渤海海域水温季节变化趋势图。

調查海区水量的平面变化不大, 吉水剔和粒木剔塑度变化趋势为近岸高, 远岸低。这是由 于该季节太阳辐射效强, 近岸海水受到随地辐射的影响, 增温较远岸坎。平水别与丰水期和枯 水期的变化相反, 其分布由近岸向远岸呈逐渐增加的趋势。这是由于太阳辐射减弱, 受陆地降

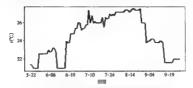


图 6-7 2003 年 5-9 月渤海海域水温季节变化趋势图

温迅速的影响,近岸海水降温较外海快。

2.盐度

盐度是海洋生态中另外一个非常重要的环境因子。许多报道认为,降丽是引起海水盐度 下降,从而引起浮游植物异常管确的物理刺激因常。

图 6-8 为 2003 年 5-9 月渤海海域盐度季节变化趋势图。

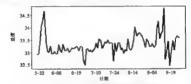


图 6-8 2003 年 5-9 月渤海海域盐度季节变化趋势图

枯水期和平水期的盐度空间变化较小,而丰水期的盐度变化较大。盐度最低点都出现在 於排行河附近或者猶為濟的消都区域,这是由于夏季人海径流增加和夏季渤海湾或为逆时 付辦報 增交总量發松的結構於預由以向應對/推立而用點的。

3.营养盐

营养盐是浮游生物赖以生存的物质基础。多数学者认为,氮,磷,硅等无机营养盐浓度的 上升是促使浮游植物生长繁殖的暴发,从而引起赤潮的原因。朱柯屏的实验结果表明,海洋浮 游植物对无机氮和无机腐的需要的适应浓度分别为80 mg/L 和 18 mg/L 以上,而邹景忠则认为 15 mg/L 的无机腐浓度是浮游植物生长繁殖的起码浓度。海水中无机氮源的主要形式为痛酸 盐、亚硝酸盐、铵盐:神。

图 6-9 为 2003 年 5-9 月渤海海域硝酸盐、亚硝酸盐、铵盐季节变化趋势图。

活性磷酸盐是浮游植物生长繁殖的重要元素,许多研究表明,它是引发赤潮的重要因素。 海水中的磷以颗粒态和溶解态存在。前者主要为含有有机磷和无机磷的生物碎屑以及某些磷 酸盐矿物颗粒;后者则包含有机磷和无机磷的两种溶解态。溶解态的无机磷是正磷酸盐,主要

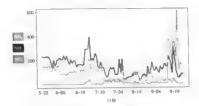


图 6-9 2003年 5-9月渤海海域硝酸盐 亚硝酸盐 铵盐 奎节变化趋势图

以 HPO² 和 PO² 的离子形态存在 存河口以及沿岸浅海区磷酸盐的垂直方向分布比较均匀,而在深海和大洋中则有明显得分层。

图 6-10 为 2003 年 5-9 月渤海海域磷酸盐季节变化趋势图

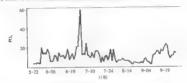


图 6-10 2003 年 5 9 月渤海海域磷酸盐季节变化趋势图

4 其他环境因意

化学耗氧量(COD)是赤潮发牛期间海洋生态环境变化的义 参数。由于浮游生物大量繁殖并进行光合作用面产生大量氧气,以及死亡蓬类的分解消耗大量氧气,所以赤潮发生时,海水中的含氮量变化较大。

图 6-11 为 2003 年 5 9 月渤海海域化学耗氧量季节变化趋势图,

海水的 pH 值也是重要的环境因子, 在赤潮发生海域的 pH 值比正常海域的 pH 值高。这可能是由于在赤潮代谢过程中所产生的代谢物溶解在海水中的缘故。

图 6-12 为 2003 年 5-9 月渤海海域 pH 值季节变化趋势图

另外还有其他环境因子,例如气象、水文、潮汐和降雨等,都是影响赤潮发生的重要因素。

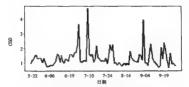


图 6-11 2003 年 5-9 月游海海域化学延复量季节变化趋势图

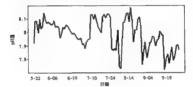


图 6-12 2003 年 5-9 月渤海海域 aH 值季节变化趋势图

6.4.2 渤海湾赤潮藻类时空分布及变化

渤海海域的浮游被物的率节变化较为明显,季节的不同,各个海域的优势种类明显不同, 在5月份的枯水期,由于温度的增加,广布柱种类增加,浮游植物的种类主要为沿岸的常见种 统,如适温和适盐范围广的布氏双尾寨和尖端奔力生。在丰水期的8月份,由于两季径流增加 的影响,益度较低,荒岸盐浓度较大,且温度较高,优势种为近岸广布种和低盐暖温性的种类。 如布氏双尾寨,太阳双尾寨,角刺寨等。在平水期的10月份,水温下降,盐度较高,出现了许多 广温,广选性种类,另一方面,温度抑制了藻种的大量繁殖,该季节出现的种类较多,而且个体 分布也较为均匀,没有明显的优势种。

渤海的不同的地理位置,水质状况也大不相同,浮游植物的种类也明显不同。5月份的北 部海域优势种为斯氏根皆藥,南部海域为个体酸小的尖隐囊。丰水别优势藻种为硅藻门的互 链藻,且名海域的甲藻种类增多。研究表明,甲藻适应的固度较高,渤海湾的浮游植物种类变 化也正说明了这种情况。回案海洋局北海分局塘沽海洋监测中心的观测结果表明;5月份出 规硅藻[17 种,其中调发赤潮的藻类有2 种,占28.6%;8月份检测出4[]12个种属,其中可以 债发赤潮的种类名,特,占50%,这可能由于丰水期盐度较低,温度较高引起的;在10月份则 为在明显的优势种属。

6.4.3 渤海湾生态环境评价与分析

1. 富营养化的评价指标、标准及模式

水体富营养化为水生植物(主要是严醉植物)的生长和繁殖提供了大量的青养物质,并往往导致赤潮的发生,直接引起水质恶化,提高水处理的难度和费用(如工业用水的路费和运转费),也会破坏疗养胜地和旅费胜地的水环境。作为农业用水,名富营养化股赁银高,对农作物也有影响。以水精为例,富营养化会阻碍根系的生长,产生侧伏、贪青、生长过分茂盛等。对了富营养化的特征与水域营养状态,不同的研究者有不同的表示方法,表 6.7 是日本学者提出的一种施区 香菜等的加州介充法。

衰 6-7 海域营养阶段的区分及其特征

特 征	腐水 城	过营养水域	富君养永城	贫营养水域
水质、牛产量				
进明度(m)	3 KX F	3以下	3~10	10以上
水色	带黑色	黄、黄绿、赤褐等	短期內看到有顧色	看不到颜色
COD(O ₂ rog/dm ³)	10以上	3-10	I~3	IUF
BOD(O ₂ mg/dm ²)	10 12 1:	3~10	1~3	1以下
无机氯化合物 (N μg/dm³)	100以上	10~100	2~10	2以下
溶解氧 DO	長温振領或元額 (0%-30%)	表层过饱和,中层为饱和,底层无复30%-50%	表层、中层为过饱和。 底层为不饱和 (50%~80%)	表、中层为过饱和状 套(80%~100%)
硫化钡	接近表层处有	在底层有	Ji.	龙
拌游植物的最大成 层情况	-	3 m以上,有时 0.5 m以上,也有在中层或低氧区 成层	形成截米至十多米	形成數十米层
叶绿素(mg/m³)		10 ~ 200	1 - 10	<1
基础生产量 [mg/(m ³ ·h)]	_	10 ~ 200	1 - 10	>1
叶绿素(mg/m²)	_	1-1.0	0.05 - 0.1	< 0.05
基础生产量 [mg/(m²+h)]	-	1~10	0.3~1.0	< 0.3
底质				
泥色	黑色、表层没有褐色 的氧化层	黑色、无氧、稍带有黑色 氧化层	有时带有黑色,有氧 化层	无 馬色、有氧化层
職化物(mg/g)	>1.0	0.3-30	0.03 - 0 3	< 0.03
COD (mg/g)		>30	5 - 30	<5
微生物细菌细胞數 (个/cm²)	> 10 ⁵	103 ~ 105	10 ² ~ 10 ⁴	< 102
浮游植物细胞数 (个/one ²)	<103,种数多	(03~105,种少数稍多	10~103,种多数少	<10,种多数少
原生动物	數多	数稍多	數少	数少

特 征	腐水城	过营养水城	富哲菲水城	贫营养水城
浮游动物(甲壳类)	_	數少,种少(也有种多的 时候)	数多,种多	數少,幹多
點栖生物				
多毛类	数少,种少	数少,种少 数特多种多	数多,特多	数少,种少
甲光类		数少,种少	数多、种多	数少,种少
例子	河口,污水排放水域	內商、半咸水蘭、海口非 常狹窄的內海	內海,水源 30 m以 上的沿岸海域,近海 海域的张模域	永禄 30 m以上的沿 岸海城、近海海域

表 6-8 富营养化的指标

	医 分	排 标
是在的评价指标	編典現存徵的側定 由于編类增殖而使水质变化的量的	COD,TOC,TOD,N,P,叶绿家、SS、键 生物种等、pH值、碱炭、CO,DO,透明
	測定	度、色皮等
	寨类所必需的物质量的侧定	P.N.TOC、T-C微量金属等、气道、方
潜在的评价指标	秦类所必需的物理量的测定	温、照度、辐射量、停留时间、AGP、Di
	包括潜在能力的测定	*

我国在"人五"期间的国家科技攻关项目中开展了近岸富营养化的研究。对纳污海湾、新港 两种不同的生态类型水体的控制变料和富营养化的主要特征进行了比较、提出了以化学耗氧 量(COD)、总氮(TN)、总氮(TN)、经验(DA)、对确设位(NO₂)、磷酸盐(PO₄)、叶绿素、初级生产力、 牛物条样件等化为营养类型的评价体系。

国内外较为通用的营养化的评价方法有以下几种。

(1) 单项指标法

单项指标法是采用富营养化陶值进行评价的一种方法,是上田和一夫(1973)提出的。具体的指标是: $COD = 1 \sim 3 \text{ mg/dm}^3$, $DIP = 0.045 \text{ mg/dm}^3$, $DIN = 0.2 \sim 0.3 \text{ mg/dm}^3$, $CALo = 1 \sim 10 \text{ mg/dm}^4$, OW 生产力 = $1 \sim 10 \text{ mg/dm}^4$, OW 生产力 = $1 \sim 10 \text{ mg/dm}^4$, OW 生产力 = $1 \sim 10 \text{ mg/dm}^4$, OW 生产力 = $1 \sim 10 \text{ mg/dm}^4$, OW 生产力 = $1 \sim 10 \text{ mg/dm}^4$, OW 生产力 = $1 \sim 10 \text{ mg/dm}^4$, OW 生产力 = $1 \sim 10 \text{ mg/dm}^4$, OW 生产力 = $1 \sim 10 \text{ mg/dm}^4$, OW 生产力 = $1 \sim 10 \text{ mg/dm}^4$, OW 生产力 = $1 \sim 10 \text{ mg/dm}^4$, OW 电子 = $1 \sim 10 \text{ mg/dm}^4$, OW 电子 = $1 \sim 10 \text{ mg/dm}^4$, OW = 1

(2)综合指数法

综合指数法又称作营养状态指数法,综合指数表达式如下:

$$E = \frac{COD \times DIN \times DIP}{4.500} \times 10$$

当营养指数 E 大于 1 时,则表示水体富营养化。

(3)营养状态质量法(NQI法)

营养状态质量指数用下式表示:

$$NQI = \frac{C_{\text{COD}}}{C'_{\text{COD}}} + \frac{C_{\text{TM}}}{C'_{\text{TM}}} + \frac{C_{\text{TP}}}{C'_{\text{TP}}}$$

式中, C_{000} 、 C_{TM} 、 C_{TP} 分别为化学耗氧量、总氮、总磷的实则浓度值; C'_{000} 、 C'_{TM} 、 C'_{TP} 则分别为评价

标准采用的浓度值。当指数 NQI 大于或等于3时,即为富君养化水平。彭云辉(1991)率先将 模糊避论引人近海富者养化水平的评价,将 NQI 法应用于珠江口水域,取得了与实侧值较为 一等的结果。

2 未测描述生态环境状况评价与分析

根据调查和监测项目,考察撤海生态环境因子的分布和变化,主要包括硝酸盐、亚硝酸盐、 佐盐、磷酸盐、叶绿素、初级生产力以及浮游植物的个体总量和浮游动物的生物量。

从评价结果来看;1993—2003 年间的泛机氯水平较 1960 年和 1982 年呈大幅度上升趋势, 均超过了浮游植物对无机氮的需求浓度,尤其是从 1995 年开始,渤海无机氮的平均浓度超过 了 0.2 ~ 0.3 和见儿的富贵非化的按摩水平。

磷酸盐自 1993 年以来,除 1994 年外,全海城平均浓度均超过 16 $\mu g/L$ 的浮游植物的适应 浓度,较 1960 年和 1962 年的浓度上升 Γ 2 信多。从空间分布来看,1993—1994 年除辽东湾湾 现外, 漢於区域海水均为一类水质标准,为富营养型。 1995—1996 年在辽东湾、蔡坠岛近南岸、 渤海湾、寨州南均出现了磷酸盐的超标区,与无机氮的情况刚好相反,1997 年磷酸盐的超标范 限品扩大趋势。

6.5 渤海湾赤潮的综合预测

日本学者吉田用一首先榜多元统计学方法应用到赤潮研究中、对现场海域赤潮生消过程 中发特色生物、物理、化学、水文、气象等大量监测数据进行统计学处理。从中摄取出影响或院 发特定未确的某个成某几个关键图子。目前应用的主要方法包括主或分析、源类分析、多元 回归分析等。由于痛类浓度是赤潮发生的标志、因而以实测的毒类浓度为因变量、其他的测量 数据为自变量、通过回归技术、给出它们的定量关系、从而确定影响藻类浓度的关键因子以及 临果值。

6.5.1 监测数据及预处理

2000—2003 年,分别于枯水期(5月)、丰水期(8月)、平水期(10月)对天津近海海域生态 环境因子进行了调查。

以 2003 年 5—9 月的实测数据作为样本、预报因子为光照、风速、气压、表层水温、pH 值、

數据的預处理包括两个方面,一是名义水平变置的处理,二是数据的标准化。有关回归树的一些集法可以直接处理名义水平变量,而且聚据的单调变化不会影响最终的结果,但是为了比较其他的算法。还是需要进行预处理。名义水平变重的处理比较规范,有多少个水平就拆成。多少个0-1变量。由于仅有一个3水平的名义变量,将它拆成3个0-1变量即可。数据有的比较整齐,波动以及方差不是很大;有的波动以及方差都很大,如浮游植物总量、对应的盒子图以及直方图如图 6-13。从图 6-13 束着,浮游植物总量的"异常值"相当多,变化范围从10 到8 952,而且样本量不是根允分,这给预照带来很大的困难。减去均值,除以标准差这种标准化方法不大适合异常值较多的数据,所以采用(z-z__)/(z__ -z__)标准化方法,消除不同量纲的影响,将所有数据映射到[0,1]区间。

在數据預处理之后,为了便于比較各种回归算法对赤硼數据的适应性,物意预留了5月 22日5号监测站,6月12日2号监测站和8月7日4号监测站 3级数据,其余90组数据用来 得到回归方程。最后以相对误差(ypuin - ypu)/ypu作为衡量的指标,当然,由于检验样本很 少。所以对着后的综合应体存了一定的海维态度,还需要其他数据或者实验的验证。

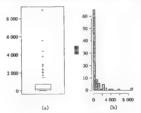


图 6-13 浮游植物总量盒子图和直方图 (a) 盒子图: (b) 直方图

6.5.2 秩相关系数分析

关于赤潮寨类称度与环境因子相关性,已有相关论述,但往往凭经验作出定性的判断, 定定置播法,或者只是考虑简单的线性关系,忽略其他的相关性。实际上,寨类恢度与任一种 邓境因子的关系可能是线性的,也可能是单调相关,甚至是很复杂的函数关系。本节以线性相 关系数描述线性相关性, 株相关系数(Myles Hollander, 1973)反映单调相关性, Hodfding 独立性 检验(Myles Hollander, 1973)统计量表达了更复杂的相关性。

通常所说的相关系数量指线性相关系数,它只是用来描述两个因素之间的线性相关程度。 为了反映其他的相关性,考虑两个教相关系数 Kendall v 和 Spearman p、它们主要反映单调相关 程度。通常如果这些相关系数接近 0,就认为对应的两个因子是独立的。但是接近到何种程度 才算独立(比如线性相关系数(或者秩相关系数)为0,07),该如何判断这两个因素是相关还是 不相关,这就需要以这些相关系数作为统计量进行独立性检验。原假设就是对应的两个因素 是独立的,对立假设对应的两个因素存在相关性。在显著性水平为0.05的情况下,如果得出 的 P 值小于 0.05、藏拒绝原假设、认为这两个因素是相关的。在众多独立性检验中, Hoeffding 神立性检验对于各种非单调的相关关系都是稳定的,从而获得广泛的应用。 格测得的 14 种环 场因子分别与纂类总统度作上述 4 种独立性检验,得到各种相关系数及 P 值,见表 6-9。

	表 6-9 各环境因于与瀛类总浓度的各种相关系数及独立性检验的 P 值								
秦 类浓度	线性相关系数	P值	Kendall 获相关系数	P值	Spearman 長相关系數	P值	Hoefiding 统计量	P值	
风速	0.053	0 602	0.182	0 008	0.254	0.011	0 02	0.007	
^ۮ	0.193	0.055	0.336	D	0.47	0	0.076	0	
表层水溢	-0.258	0.01	-0.171	0.012	-0.238	0.018	0.029	0 002	
pH负	-0.42	0	- 0.27	0	- 0.385	0	0.099	0	
盐度	0.152	0.134	0.186	0 007	0.268	0.008	0 028	0.002	
化学耗 氣酸	- 0 073	0.472	-0 948	0.48	-0.056	0.582	-0.003	0 524	
DO	0.189	0 06	0.148	0 03	0.222	0.027	0.016	0.014	
碘酸盐	-0.001	0 996	0.039	0 575	0 071	0 494	0.002	0 255	
非機盐	- 0.201	0.046	- 0 167	0.014	- 0 263	0 009	0.62	0 006	
磷酸盐	-0 259	0.01	- 0.139	0.042	-0.207	0.04	0.012	0 027	
引婦家	-0 102	0.314	-0.074	0 277	-0.116	0.252	0.006	0 099	
亚硝酸盐	0.009	0.93	0 022	0.75	0 038	0 709	0 005	0.113	
Mr. HL	0.408	0	0.000	0.001	0.004	0.067	0.003	0.100	

1 非缘性相关因子

从表 6-9 可以看出,两个秩相关系数和 Hoeffding 检验的结果是一致的。两个秩相关系数 检验和 Hoeffding 检验都说明因子风速、气压、盐度、DO 与藻类浓度存在相关性,而线性相关系 數檢驗則认为这4个因子与黨學浓度是独立的。这也说明黨类浓度与这4个因子之间存在某 种单调相关关系,而非通常假定的线性关系,而且这4个因子的秩相关系数和 Hoeffding 统计量 都大干 (), 也说明它们与藩类浓度是正相关。为了更加准确地说明是正相关还是负相关, 还可 以以相关系数作为检验统计量,原假设是两个因子独立,对立假设是两个因子存在正(负)相关 性。但是 Hoeffding 检验却不能检验正(负)相关性,只能检验是否相关,其他的三个检验都可 以,所得结果与上面所说的一致,这里不再列出。系数的绝对值越接近 1,对应的因子的相关 性就越大,所以这四个因子中与藻类浓度正单调相关最大的是气压,盐度和风速与藻类浓度的 正单调相关性差不多,DO 与纂类浓度的正单调相关性与上面三种环境因子相比就略逊一筹。

2.线性相关因子

环境因子表层水温、pH值、硅酸盐、磷酸盐由于与藻类脓度的线性相关系敷都较大、相应的独立性检验的 P值都小于0.05,所以可以认为它们与藻类液度存在某种线性相关性。而且 核相关系敷和 Hoeffdung 统计量对应的独立性检验的 P值都小于0.05,因而有更充分的理由相 信这 4个因子与藻类液度存在某种相关性,且这种相关性可以认为是一种线性相关。另外也可以单纯从线性相关系敷的大小和正负来判定该因子与藻类液度的线性相关性的强弱和正负。由于这 4个环境因于对应的线性相关系敷以及获相关系敷部为负值,所以表明这 4个因之与藻淡浓度那是负线性相关。且线性相关强例依依为 pH值。硝酸盐>表层水温>硅酸盐,但基硝酸盐和寿尼水温与藻水素的熔体性相关作几乎相同。

3. 独立因子

在表 6.9 中比較特殊的是國子輕截、它的 线性相关系数为0.425.对应的独立性检验的伊 但几乎为0.所以该因子与需类核度存在很矮 的线性相关性。理论上认为其他的三种独立性 检验的 P 值也应该接近 0.因为线性关系一定 是单调的。但实际结果却恰恰相反、我相关系 数和 Hostiting 统计量都低小、对应检验的 P 值 都大于0.05。画出标准化(减去均值除以标准 差)后的痛美体度数据和对应的被盐数据的散 台阳、见图 6.14。

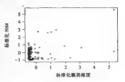


图 6-14 标准化蒸类浓度和标准化 NH, 散点图

从图 6-14 可以看出藻类陈度和因子酸盐之间呈现出两条直线趋势,一条接近水平,一条接近垂直。但一般认为这样是没有什么重數关系的。所以跌相关和 hoelding 都未能檢查出来。由于有线性趋势,所以践性相关系数还是很大的。这也反映了线性相关系数的局限性。通常更愿意接受其他独立性检验的结果,认为源类浓度与环境因子或盐之间没有什么相关性。其他剩余的环境因子,如化学耗氧量、磷酸盐、对绿素、亚硝酸盐都可以认为增藏类浓度影响不是很大,以后建立模型时就可以不必考虑这些因素,这大大降低了维数,节约了成本。

从渤海湾赤潮监控区的监测及分析可以得出以下结论。

①渤海湾地区影响赤潮藻类浓度的环境因子为气压,盐度,风速和 DO,其每一因子对藻类 浓度的影响都可以看作是正的单调关系,且影响的大小依次为气压,盐度,风速和 DO。

②环境因子表层水温,pH值,結瞭盐、磷酸盐与蒸炭浓度器呈現出负的线性相关性,且线性相关强弱核次为pH值、磷酸盐、表层水温、硅酸盐,但是磷酸盐和表层水温对囊类浓度的线性影响几乎相同。

③其他测量的理化因子,如耗氧量、磷酸盐、叶绿素、亚硝酸盐、铵益都可以认为对藥类浓度几乎没有影响。

6.5.3 随机梯度 Boosting 分析

1.参数选择及相对影响计算

运算过程中主要是一些参数的选择。有些可以按照建议取值,如学习速度小于 0.1 就行, 这甲取 0.001。Bazzing 的比例取 0.5,每棵树的叶结点数是由树的深度控制的,这里令其为 3, 即每模树最多有三个变量的交互作用。比较难确定的参数是树的数目,由于梯度 Boosting 可以在原来生成树的基础上任意增加树的数目,所以首先生成足够多的树,然后从中选择最优的,得到的平方接失如图 6-15 所示。

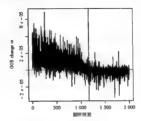


图 6-15 选择最优的树的数目

图 6-15 中坚线表示最优的树的数目 M = 1 165.选用的损失函数是绝对损失函数。为了对生成的回归树产生直观的认识,给出所有的树是不现实的,观察最后一棵树,即第 1 165 棵树, 即第 1 165 棵树, 即第 1 165 棵树,



羽を16 最后 - 毎回归納

預留的三组數据的相对误差为 -0.428、-0.172、0.204、这在一个可以接受的水平之内。但是由于所得模型的形式非常复杂。很难有实际的解释。实际上人们最关心的问题在这么多的变量中究竟哪个变量与序游植物总量长系更密切。哪个变量为对游植物的生长起着关键的作用,即它们对异游植物总量影响的强弱。问题就转化成这样的形式;给定一个多元函数 $F(x_1, \dots, x_n)$ 、怎样度量单自变量。对整个函数 $F(x_1, \dots, x_n)$,的相对影响。一个可行

的度量基

$$I_{j} = \left(E_{x}\left[\frac{\partial F(x)}{\partial x}\right]^{2} \cdot var_{x}\left[x_{j}\right]\right)^{1/2}$$
(6-63)

但是对于回归树来说,由于不连续,不存在一阶偏导,式(6-63)根本不存在。这里给出回 野树的一个估计

$$\hat{I}^2 = \sum_i t = I^{J-1} \hat{z}_i^2 I \quad (\nu_i = i)$$
 (6-64)

其中:,表示第 J 个时结点的回归构的第 z 个非叶结点,可结点总比所有非叶结点多一个; u,是 在非叶结点的分割变量; c,就是分割造成的经验相关的减少 式 (6 64) 直接作为问归构的不 同少量对目标函数影响的度量 对于柯的线性组合,自然的根广就是

$$\hat{I}_{j}^{2} = \sum_{n=1}^{N} \hat{I}_{j}^{2}(T_{n})$$
 (6-65)

·般柯的数目非常多、每个变量被选件分割变量的概率是同等的 如果一个变量多次被 选件分割变量。高速是该变量确实对目标函数的贡献大 16 个环境因子(加上拆分的两个名 文水平变量)对浮游植物总量的影响大小的次序见图 6 17,相对影响的具体数值大小如表 6-10 所法。

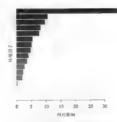


图 6-17 环境因子对浮游植物总量 的影响大小排序

表 6-10 环境因子对浮游植物总量的相对影响大小

序号	环境因子	相对影响
L	低	34.76
2	磷酸盐	10.61
3	pH ffE	9 65
4	溶解質	8.14
5	表层水型	7.72
6	叶绿素	5.36

维泰 序导 环路因子 超对影响 7 風潮 5 NR 4.71 2 公额经 ٥ 医磷酸盐 3.94 10 松库 3.42 11 修社 2.61 12 小子芸具書 2.07 13 研療社 1 78 14 断于 0.12 副手 o on 15 n nn 順天

从表 6-10 以及图 6-17 可以看出,对产龄植物总量的影响大小依次为气压 > 磷酸盐 > 山 值、溶解氧 > 表层水温 > 叶螺章 > 风速 > 硅酸盐 > 亚硝酸盐 > 盐度、铵盐 > 化学耗氧量 > 硝 酸盐 > 晴天 9 两天 9 两天。安际上,晴天,阴天,积天是光照因子的三个名义水平。它们对维 植物总量的影响很小以致可以忽略。另外浮游植物总量针对光照因子的三个水平的方差分析 表(ANOVA)(表 6-11) 也说明光照因子的不同水平对浮游植物总量较有影响。而方差分析表是 假定每组数据来自正志分布且方差相同,也可以采用不必假定方差相等的均值检验(B. L. Welch. 1951),检验的结果如下;

 $F = 0.958 \ 8$, df(num) = 2.00, df(dunom) = 12.16, p-value = 0.410 5

这同样加强了以上结论。6.5.2 节直接从环境因子与浮醉植物总量数据的秩相关系数以及 Hoefding 独立性检验统计量出发,得到各种环境因子对浮游植物总量的影响大小次序为气压 > 內性值、盐度> 硅酸盐> 风速。 表层尽温> 溶解氧> 硝酸盐,其他的因子如磷酸盐,叶绿膏、 定酮酸盐、食盐、化学耗氧量、光照可以认为对拌醇植物总量包有方域。两者都认为气压、时值、表层水温、硅酸盐、盐度对浮游植物总量的影响很大,有所差别的是因子磷酸盐和叶绿雾, 6.5.2 节以为对浮游植物总量没有影响。而这里分析出它们对浮游植物总量影响很大,尤其是 需酸盐。一个原因是株相关系数只是检验单调性,不是对所有的关系都能检验出来。另一个 原因是分别计算各种因子与溶解植物总量的软相关系数。而没有考虑其他因子的交叉作用。

河南海南岛		

	DE	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(> F)
100	2	0.016 56	0.008 28	0.265 1	0.767 8
Residuals	90	2.811 38	0.031 24		

2.模型编相关可视化

函数的可视化是数据分析的一个重要工具,但是可视化只是限制在一、二元函数。一元函

數的图形表达包括散点图(自变量连续),方格图(自变量是名义水平变置)等等。二元函數表 达常用的是等高图。离于二元的函数很难通过图形表达,一种有用的想法是考虑部分自变量 对整个函数的编相关性,然后收集这些图形,从而对函数的整体形成大概的印象,能够给出一 独有用的確设。

令
$$z_i$$
 是自变量 $x = |x_1, \dots, x_n|$ 的一个大小为 i 的子集和,即 $x = |z_1, \dots, z_n|$ $\bigcap_{i=1}^n x_i, \dots, x_n|$

z、是补集、即

$$z_1 \bigcup z_{1,1} = x$$

所以模型 $\hat{F}(x_i) = \hat{F}(x_i, x_{i,i})$ 。如果特 $x_{i,i}$ 固定,则 \hat{F} 就是 x_i 的函數,这就是通常所讲的截面。 人们所关心的是 x_i 对函数 $\hat{F}(x)$ 的影响,这随着 $x_{i,i}$ 不同而不同,为了减少对 $x_{i,i}$ 的依赖性,平均是一种很好的方法。即

$$\tilde{F}(z_i) = E_{i \setminus i} [\hat{F}(z)] = \int \hat{F}(z_i, z_{\setminus i}) p_{\setminus i}(z_{\setminus i}) dz_{\setminus i}$$
(6-66)

 $p_{11}(z_{11})$ 是 z_{11} 的边缘密度。(6-66)的一个估计就是

$$\tilde{F}(z_t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \hat{F}(z_t, z_{i,1t})$$
(6-67)

图 6-18 显示对浮游植物总量最有影响的环境因子 p(气压)、PO、(磷酸盐)、pH值、DO单个变量分别与浮游植物总量的偏相关。图 6-19.图 6-20.图 6-21 分别显示了两个变量对浮游植物总量影响的偏相关性。从图 6-18 明显 6-20.图 6-21 分别显示了两个变量对浮游植物总量影响的偏相关性。从图 6-18 明显 6-19 和图 6-20 指则而增大,且磷酸盐存在一个临界点。当超过这个临界点、磷酸盐再增大,浮游植物总量也不会增加。可见在渤海湾赤湖的形成过程中,磷酸盐汾滨省一个重要的角色。图 6-19 和图 6-20 指出磷酸盐和 3H值的 6-20 作用比磷酸盐和 9L版 6-19 20 指出磷酸盐

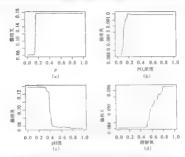


图 6-18 环境因 f p('(压)、PO。(磷酸盐)浓度、pH 值 DO 单个变量 分别与浮游植物总量的编相关

(a)"(h: 与疗脐植物总量偏相关:(b)磷酸盐与疗脐组物总量偏相关(c)的值与疗脐植物总量偏相关:(d)溶解氧与疗脐植物总量偏相关

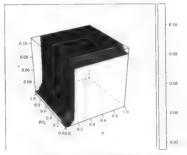


图 6-19 环境因子 p(气压)与 PO₆(磷酸盐)浓度两个变量与浮 游植物总量的偏相关

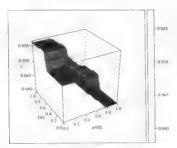


图 6-20 环境因子 pH 值 DO 两个变量与浮游植物总量的偏相关

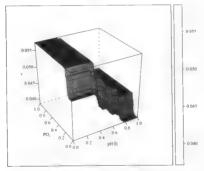


图 6-21 环境因 f PO₄(磷酸盐)浓度 、pH 值两个变量与浮游植物总量的偏相关

6.5.4 其他算法比较

基于环境因子预测浮游植物总量也是未潮研究的一个主要方向、杨建强(2003)和莱如钰(2001)选择的算法是人工神经网络,陆立聪(2002)沿旁途的是支持向量,湖中平(2004),林祖享(2002)沿及安华(1997)采用一些传统的回日力 法。不同算法预测预留的三组数据的相对误差的结果见表 6-12。从表 6-12 可以知道绝对损失函数的脑机梯度 Boosting 算法更稳健。值得注意的是,同样的梯度 Boosting 事法,提失函数选择不同,对预测的梯度影响很大。由于浮游结婚总量的是存储较多《如图6-133)除对程头面数数是平均,没有现实高级

多ら12 不能策決機器等者的三級教授的相対選差

	5月22日 ・	6月12日	8月7日
相对误差	5 号监测站	2 号监测站	4号煎腾站
随机梯度 Beesting (絶対損失函數)	- 0 428	- 0.172	0 204
通机梯度 Boosting (平方损失函数)	-4.03	- 1.151	- 1.378
支持向最回归	0.701	- 1.991	- 0.339
人上神经网络	- 0 328	-4 186	0 059
MARS	-0 439	0 277	-0.336
投影導麻	-0.191	-0.092	-6.85
同栏侧	- 0.357	0.318	-1.383

第7章 赤潮的神经网络与支持向量机预测

本章详细探讨了运用神经网络和支持向量机来预测赤潮的方法。最后一部分阐述了知识 发现在外颈驱性临离教程中的应用。

7.1 人工神经网络方法

人工神经网络在 20 世纪 80 年代获得迅速发展。它是模拟人脑结构的一种大规模的并行 连接机制系统,不需要有关体系的先验知识,具有自适应建模学习及自动建模功能。已经证明,神经网络能够任意分分地通近非线性关系,它既可用来估计常规模型中的参数,也可用于直接描述系统的动力学特性。在影响预测对象的因素还未完全明确之前,将其应用于预测研究是一个较好的速程。

7.1.1 神经网络结构

神经元是人工神经网络的基本处理单元,一般为非线性输出单元。神经元输出既 受输人信息的影响,也受神经元内部其他因 袁影响,因此需加入一个门限值或阈值,见 图 7-1。

图 7-1 中神经元有 n 个输入 $x_i(j=1,2,\dots,n)$, x_i 的矩阵形式为 $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$. 通过对每个输入赋予权载 $\omega_x(\omega_x)$ 的矩

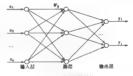


图 7-1 神经网络结构

降形式为 $W = [\omega_{i1} \quad \omega_{i2} \quad \cdots \quad \omega_{n}])$ 以后,进行 $\sum_{j=1}^{n} \omega_{j}$,形式求和,形成激活函数f的输入。激活函数f的特人。补经元模型输出表示为

$$y_i = f(\sum_{i=1}^{n} \omega_0 x_i + \theta_1)$$
 (7-1)

神经网络的激活函数的作用为:

①控制输入、输出:

②对输入、输出进行函数转换;

③对输出范围进行限制。

神经网络的基本模式有前向型、自组织型及随机型网络。

前向型神经网络是一种运用厂泛的映射性网络,它能通过样本对(x,y)学习某种函数关 $\S_{y=f}(x)$ 。通常、前向型神经网络除了输入、输出外、每一层的节点(神经元)的输出与下一层的每个节点根连。对于同层的神经元而言其信息处理方式是并行的,但层与层之间的信息处理方式则悬申行的。

设: θ_k 表示 k 层第j 个神经元的阈值, W_{p} 表示 k-1 层第j 个神经元与第 k 层第i 个神经

元之间的连接权,neia表示 k 层第i 个神经元的输入,Oa表示 k 层第i 个神经元的输出,ma 表示 k 层神经元数目,则每个神经元的输入

$$net_{ik} = \sum_{i}^{n_{k-1}} \overline{W}_{ik} O_{jk-1} + \partial_{jk}$$
 (7-2)

神经元的输出

$$O_{\bar{n}} = f(net_{\bar{m}}) \tag{7-3}$$

$$f(net_k) = \frac{1}{(1 + e^{-net_k})}$$
(7-4)

对于一个三层前向型神经网络,其结构表示如下。

第一层:

$$O_{il} = x_i \quad (i = 1, \dots, m_1)$$
 (7-5)

第二层:

$$nei_{\mathcal{Q}} = \sum_{i=1}^{n_0} W_{i2} O_{i1} + \hat{\sigma}_{i2}$$
 (7-6)

$$O_a = f(net_2)$$
 $(i = 1, \dots, m_2)$ (7-7)

第三层:

$$net_{i3} = \sum_{i=0}^{n_2} \overline{W}_{i3} O_{i2} + \vartheta_{i3}$$
 (7-8)

$$\gamma_i = O_n = f(net_n) \quad (i = 1, \dots, m_3)$$
(7-9)

若已知參數 V_{μ} 、 ∂_{a} ,则由给定的輸入x。可向前并行计算出每层各节点的输入与输出,并得到输出x。

对于多层前向型神经网络

$$net_{ik} = \sum_{j=1}^{n_{k-1}} W_{ik}O_{i(k-1)} + \vartheta_{ik}$$
 (7-10)

$$y_i = O_{\pm} = f(net_{\pm}) \quad (i = 1, \dots, m_{\pm})$$
 (7-11)

由于多层前向神经网络具有逼近任意复杂连续函数的能力,因此该网络非常适合于对时间序列进行预测。在具体使用中,不需要对所分析的时间序列化出任何假设,通常是根据已有的样本教据对网络进行训练。训练的过程就是预测均方差达到全局最小的过程,也是预测模型的建立过程。从统计观点看,神经网络重模的最终结果是逼近所描述系统的非线性函数,并用网络的连接权值和搁值来表示。

如何设计多层感知器隐层单元的个数?这里给出隐层单元数的上下限,以供设计时参考。

令簡单元输出 $h_j = \sup(\sum_{i=1}^n \omega_{\mu_i}x_i - \theta_i)$ 是一个线性網值分割函數, 每个簡单元把 a 维输人空间 S 划为 S_a 和 S_a 两个部分。设 g 是定义在 S 空间的一个函数,对下感知器网络对应的 k 个样本输入。希望其識足

$$\gamma_{i} = \text{sgn}(\sum_{j} h_{j}\omega_{j}^{*} - \theta^{*}) = g(x_{l}) \quad (l = 1, 2, \dots, k)$$
 (7-12)

问题是能否找到隐单元数 n_1 ,通过调整输出单元的系数 ω_j^* 、 θ^* 使上式满足条件,即可实现任何一个 g 函数的映射。

在一个输入空间 S 上,存在有 k 个样本,如果需要用 n,个超平面划分为 d 个区域,使 d > k . 井保证每个区域对应于一个样本,则最大的脑单元数 n,应摘足 : n : n = k - n 1. 其中 k 为输 人继本数

隐单元数为 k-1 时设计网络的上限。因为 k-1 超平面是不相交的,所以只可分为 k 个 区域,但考虑则规平面可交且只有一个隐层的情况下,输入为 n 个单元,n,个膨单元可把输入空间划分成一定数目的区域,如果这个区域是封闭的,称之为闭区域。 在数学上可得到独立区域转

$$p(n_1, n) = \sum_{i=1}^{n} {n_1 \choose i} \quad (n_1 \ge i)$$
 (7-13)

其中

$$\binom{n_1}{i} = 0 \quad (n_1 < i)$$

那么,对 & 个样本讲行线件分割时要求

$$n_1 = \min[p(n_1, n)] \ge k$$

$$(7-14)$$

式 7-14 給出了胞单元數的下限,即使得 $p(n_1,n)$ 为最小 $(p(n_1,n)$ 应大于样本數)时的 n_1 值。

7.1.2 神经网络算法

1986年, Modelland 和 Rumelhart 提出了多层前向载神经网络的误差反传算法 (Back Propaguto, 简称为 BP 算法)。下面以代价函数取误差平方和的形式为例, 分步驟介绍图 7-1 所示网 络的误差逆传播学习。

①给 L_t 层单元到 L_o 层单元的连接权 v_h 、 L_o 层单元到 L_o 单元的连接权 ω_o 以及 L_o 层单元的阈值 θ 、 L_o 层单元的阈值 θ 、 L_o 层单元的阈值 θ 、 L_o 层单元的阈值 θ 、 L_o 层单元的

②对于每个模式、对 $(A_k, C_k)(k=1,2,\cdots,m)$ 进行下列操作。

a. 将 A_1 的值送到 L_1 层单元,再将 L_2 层单元的撒括值 a. 通过连接权矩阵 V 送到 L_2 层单元,产生 L_2 层单元新的激括值

$$b_i = f\left(\sum_{i=1}^{n} v_{ki} a_k + \theta_i\right) \tag{7-15}$$

式中, i=1,2,…,p;f为S型函数,即

$$f(x) = (1 + e^{-x})^{-1}$$
(7-16)

b. 计算 L, 层单元的激活值

$$c_j = f\left(\sum_{i=1}^{p} \omega_{ij}b_i + \gamma_i\right) \tag{7-17}$$

式中,j=1,2,…,q。

c. 计算 L_c 层(输出层)单元的一般化误差

$$d_j = c_j(1 - c_j)(c_j^k - c_j)$$
 (7-18)

式中 $,j=1,2,\cdots,q;c_i^k$ 为 L_c 层单元j的期望输出。

d. 计算 L_s 层单 ri 相对于每一个 d_i 的误差

$$e_i = b_i (1 - b_i) \sum_{i=1}^{q} \omega_{ij} d_j$$
 (7-19)

式中, i=1,2,...,p。上式相当于将 L, 层单元的误差逆传播到 L, 层。

e. 调整 L。 层单元到 L。 层单元的连接权

$$\Delta \omega_u = \alpha b_i d_i$$
 (7-20)

式中, $i=1,2,\cdots,p;j=1,2,\cdots,q;a$ 为学习率($0<\alpha<1$)。 (调整 L 层单元的侧值

$$\Delta \gamma = ad. \tag{7-23}$$

式中, i=1,2,…, g.

h. 调整 L. 层单元到 L. 层单元的连接权

$$\Delta v_{\nu} = \beta u_{\lambda} e_{\nu}$$
 (7-22)

 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}$

i. 调整 L。 层单元的阈值

$$\Delta \theta_{i} = \theta_{i}$$
 (7-23)

式中, i=1,2, ..., p。

③重复步骤②,直到对于 $j=1,2,\cdots,q$ 和 $k=1,2,\cdots,m$,误差 d_j 变得足够小或者变为零为此。

这种算法的主要思想是把学习过程分为两个阶段:第一阶段(正向传播阶段),输人信息从 输入层经过稳含层层层处理并计算出各单元的实际输出值,第二阶段(反向过程),若在输出层 不能得到期望的输出,从后向前修正各层次之间的联系权重,在不断的学习和修正过程中,可 以使网络的学习误差达到最小。实际上,当误差达到人们所希望的要求时,网络的学习过程就 贫事了。

7.1.3 遗传算法介绍

遗传算法是模拟生物进化过程的计算模型,它是自然遗传学和计算机科学相互结合渗透 而形成的新计算方法。生物从其架代继承特性或性状的现象称为遗传。生物的遗传截体是染 色体,而基因处控制生物遗传的差本单位。多个基因组成染色体。 染色体中基因的位置物态 因塞。问一基因逐可能有的全部基因称为零位基团。等位基因和基因歷决定了染色体的特征, 也就决定了生物个体的性状。 此外、染色体有两种组的核示模式,分别为基因型和表现型。 所谓表现现及指生物个体所表视出来的性状,而基因对指与表现型。所以表现型是基因组成。 一种基因型的生物个体在不同的环境条件下可以有不同的表现型。所以表现型是基因组成。 增是由一维的0-1 申末表现。申上各个位置对应上途的基因座,综合位置上所取的值对应上 达的等位基因。遗传算法处理的对象是染色体,或者叫基因个。一定数量的个维组成了群体。

遺传算法包含两个必须的數据转接操作。一个是表现型到基因型的转換:另一个是基因型 到表现型的转换。前者把搜索空间中的参数或可行解转换成遗传空间中的染色体或个体,此 过程叫做编码操作。后者是前者的一个相反操作,叫做详码操作。生物在世代繁衍中,能够通 过自然选择逐渐向适应于生存环境的方向进化。遗传进化过程包括三种演化操作:在父代基因 群体中双亲的选择操作;两个父代双亲个体的交叉操作,产生子代的基因个体;子代基因群体 由幼帝皇操作;

造作算法的 5 个基本要要是、对可行制空间的参数编码、祖先群体的设定;适合度函数的 设计;遗传操作的设计;此刻参数的设定(群体规模大小、使用各遗传算子操作的概率和迭代停 止准则)。这 5 个要案构成了遗传算法的核心内容,遗传算法规程如图 7-2 所示。

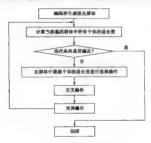


图 7-2 遗传算法澳程示意图

(1)编码与基因码链

由于遗传算法不能直接处理解空间的解数据,所以必须通过编码处理将它们表示成遗传 空间中的基因型申结构数据。首先对每一个自变量进行编码,一般用一定位数的二进制码代 表一个自变量的各种取值,然后将各自变量的二进制码连成一串,得到一个二进制码串,它代 表了自变量的一组取值所决定的一个可行解。

(2)相先群体的生成

由于遗传算法的群体性操作需要,所以必须为遗传操作准备一个由若干初始解组成的租 先群体。具体由计算机按随机方法,通过伪随机敷产生一系列的二进制码链、每一码链代表租 先群体中的一个租先个体,而一定数量的租先个体就构成最原始的租先群体。租先个体的索 质通常根差,遗传算法的任务是从这些租先出发,模拟进化过程,择优次分,使基因群体的平均 常局逐步提高。最后提出非常优秀的群体与个体。

(3)基因个体紊质的评价

在遗传算法的搜索过程中,但不需要其他外部信息。仅用评价函数值来评估基因个体或 在成功的点,并作为以后遗传操作的依据。这个评价函数值称为基因个体的适合度, 般它取为 目标函数。

(4)选择操作

选择或复制操作的目的是为了从当前群体中选出优良的个体,使它们有机会作为父代繁

衍子孙。判断个体优良与否的难则就是各自的适合度。显然这一操作是借用了达尔文适者生存的进化原则,即个体的适合度越高,其被选择的机会越多。选择操作的方法很多,通常采用的有贿轮法,它采用与适合度成比例的概率方法来进行选择。具体地说,就是首先计算群体中所有个体适合度的总和 □/√、然后计算每个个体的适合度所占的比例 f/□/√,并以此作为相应的选择概率,根据这个概率可计算出每个个体被选择的次数,将被选择的个体送到配对库中配发挥组。如此选择与复制的结果,使得适合度高的基因个体有更多的机会策缩后代,使其优自经统任以连续和保留。

(5)交叉操作

交叉操作是从配对库中随机选出双亲进行位申处理得到新一代的基因个体。最简单的交 又操作是单点交叉、该操作可以分两步进行;首先对配对库中的个体进行随机配对得到双亲; 其次、腕机地选取一个截断点,将双亲的基因两链在截断点切开,然后交换其尾部得到它们的 两个后件基因个体。

(6)变异操作

变异操作同样也是随机进行的,以一定的概率选择群体中的若干个体,对已选取的每个个体,随机选取某一位,将该位的数码取反。变异操作是一个十分演协的遗传操作。在自然选择的作用下,有利的变异会得以遗传与保留,而有害的变异会在逐代遗传中被商法。它需要和交操化等每份使用,其目的悬於捆群体中个体的多样性,克服有可能够于局部解的弊级。

用通过选择,交叉和变异操作得到的新一代群体代替其上一代群体,再同到上述的步骤 (3),对新一代群体的各个个体再进行评价。如此选代下去,各代群体的优良基因成分逐渐积 职,群体的平均适合度和最优个体适合度下断上升,直到选代过程产业效,即适合度趋于稳 定,不再,于时,群体中运合度量大的一些个体所对应的可行解就是液优化问题的精豪解。

7.1.4 模糊神经网络

神经网络系统和搜喇系统都是处理不精确的,提聯的信息,都是利用数值化了的信息来建 立特定的非线性晚时,但二者在知识的存储与表达、计算制度、自适应能力等方面存在很大的 差异。而计算机技术的迅速发展促使人们对模糊信息的处理提出更高的要求,使神经网络系统和模糊系统取长补短,走向结合之路。目前,由于模糊神经网络在处理非线性、模糊性等问 縣上的优越性,也由于它在智能信息处理方面巨大的睾力,使得趣来能多的专家学者投入到这 个短轴中来,连取据了点有应数的研究成果

对于模糊系统、它是通过人为维立规则率。然后通过规则的形式存储知识,再通过存储的 规则匹配实规如识的推理。由于模糊系统的基本运算是加法和乘法、它的处理速度快、但计算 精度低。在非线性缺射层处上,特经网络实验的是点到点之间的非线性映射,所反映的输入— 输出关系曲面是近似光滑的、面模糊系统实现的是区域块到区域块之间的非线性映射,所对应 的输入—输出关系曲面是粗糙的排形台阶。随着计算机技术的发展,人们对非数值信息处理 的要求越来越高,因此,当争绘网络和模糊理论面对更复杂问题和更广泛领域都遇到困难的时候,两省的相互促进。相互补充就成为必然。它们相结合的产物就是模糊神经网络、美国南加 州大学的 B. Kooko 是研究神经网络和模糊逻辑相结合的著名专家、他提出模糊联想记忆、模糊 从知图的重要概念。普度大学的C.T.Lina G.S.G.Loe 经电影中降回路的模糊控制和决策 系统,它按照输入模糊化,模糊规则推理和输出解模糊化的顺序构成多层前衡型神经网络结构,模侧逻辑运算融入神经元和网络结构中。V. Pedrozz 构造两种神经元,其一是聚合逻辑神经元、它可进行或、与、及逻辑运算,从高实现输入信号的聚合;其:是参考逻辑神经元。它首先相对于参考点分析输入信息。包括匹配、包含:差异与发配,分析结果被综合能一种神经元的聚合部处。J. M. Keller 提出实现模制逻辑推理的神经网络结构及三种变形。R. R. Yager 构造一种按序加权平均的模糊神经元。它采用矢量 V 来代替通常神经元中的激励函数。J. J. Bucklev 研究神经网络,连续函数和模糊系统之间的数值关系,证明了混和神经网络能实现连续模糊函数。

当人们在实际应用领域中需要用機構神经网络来实现模式识别。自适应控制、故障检测等应用时,会遇到一些疑难。如何健同,具体细节如何处理等等。在对许多应用实例归纳整理的 基础上,作者提出以下建议。首先。必须根据实际问题确定输入特征向量和乘周函数、特征向量实际上就是模糊中的模糊变量,每个模糊变量对应若干个模糊子空间,而模糊变量属于某一子空间的乘属度,由相应的乘属函数来确定。在网络中,把输入特征的重觉模糊化后对应的节点称为模糊节点。发光。选择网络的算法,现在已有许多理论成熟的种经网络其长。每一种算法都有其代缺点及其适用的领域。因此、选择网络算法时要考虑到实际近阳的需要及网络的市广与优化能力。第三,必须根据实际需要确定网络的市外结构。即网络具体由几层构成、每一层应该设置几个节点,合理的网络结构会使网络的手习收敛过程加快,能有效减少网络的复杂性。

1. 輸入特征向量的确定

对一个实际问题,特征向量的确定是十分重要的。选择特征向量时,要考虑到应选的向量是否完全她描述了问题的本质特征。如果特征向量不能有效地表达事物的特征。网络经训练个良的增多、将使网络的计算是呈指数增长、会导致组合量炸。所以,在选择特征向量力,应从实际出发,根据领域专家的意见,运当地选择最能表现事物本质的变量。隶属函数的选择。同样也要从实际出发,根据领域专家的意见,运当地选择最能表现事物本质的变量。隶属函数的选择。同样也要从实际出发,然后作合则的假设与选择。确定来具函数的方法报多,可以请领域专家评分,也可以通过。F统计试验来确定,还可以用概率统计的处理结果来确定。对于不同的问题,成该采用不同的方法。在许多应用中,由于人们认识率物的局限性,开始只能建立一个近似的隶属函数,然后通过举习逐步修改完善。在客观事物中,有很多是以实数集及作论域,把实数集及上F集的隶属函数条为F分布。有一些常用的F分布可供实际应用时选择。如矩形分布或单矩形分布、类特形分布或等形分布、类物等形分布、类的形分布、三角分有等。

2. 网络算法确定

模糊神经网络已有很多理论成熟的算法与模型。改进的算法和新的模型也不断模型。不同 實施,使我們是一個一個,FMM,F-MKT、FLIQ上要适用于模式识别或分类系统,模糊 CMAC 神经网络适用于机器人经制;Find. PS通用于非线性系统辨识或故障诊断;FPNN 的适用 范围较广。在选择网络算法时,要从算法的适应范围、网络的模模、算法实现的难易。网络的容 量和可推广性等方面综合考虑。有时,可以采用几种不同的算法建模,用相同样本来训练它 们,比较它们的收敛时间、收敛精度、训练次数、仿真结果等特性、选择最适用于本领域的一种 算法。

1. 网络透物莲花

(1)网络拓扑结构描述

不同的機構神經開絡模型,有不同的開絡系計結构,其结构的构造方法各有特点。比较各 网络结构的异同,可以找到它们的共同点,即模糊神经网络基本上都由三层构成,可把它们用 一种统一的结构形式表示,如图 7-3 所示。



图 7-3 模糊神经网络结构

第一层为模糊化层。它实现输入变量的模糊化,完成一个隶属函数的计算,计算出变量相 对于每个模糊子空间的像量度。模糊化层是每一类模糊神经网络必要的部分。

第二层是模糊推理层。模糊推理层是网络结构中相对重要的部分,它联系着模糊推理的 前提和结论,实现网络的模糊映射。模糊推理层的结构是多样化的,可以是 IP 风势,也可以 是 R. BF 网络或其他形式的网络,不同的结构对应不同的算法,而各种模型的区别正体现在这 里。

第三层是去模糊化层。它特推理结论变量的分布型基本模糊状态转化战确定状态,负责 始出确定的输出以便系统去技行。去模糊的常用方法有最大梁周原则和模糊最心法。在一些 特定的网络中,可以不构造去模糊化层。

为了增强模糊神经网络的自适应性、温常镀糊化层、模糊推理层和去模糊化层均由多层网 特组成。这样、通过网络学习,就可以实现模糊推理模型中的隶属函数和模糊规则的自动调 等。

(2)网络结构参数的确定

初始覹节点的经验公式:

$$s = \sqrt{0.43mn + 0.12n^2 + 2.54m + 0.77n + 0.35 + 0.51}$$

其中, m 是输入层节点数; s 是隐层节点数; n 是输出层节点数。在这个基础上,再根据实际需要作适当影响。

7.2 浮游植物密度的人工神经网络预测

据蔡如係 1997 年的調查數据(表7-1), 共计 17 个样本, 浮游植物和夜光藻 (Nociluca scientillans) 的监测按《海洋调查规范》(国家海洋局, 1975) 进行, 水文、理化因子的采样及分析按《海

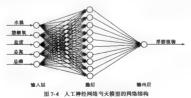
洋污染调查循行规范)(国家海洋局 1979)核行。各种理化因子有水温 7 连幅值 DO 社座 8 总氮、可溶性无机磷、浮游植物密度等。

桦水	水揚(℃)	溶解氧(mg/L)	益度	总氮(µmml/L)	总确(;ampl/L)	夜光藤密度 100 个/元
1	22.9	7.06	30.3	0.4	0.54	1.77
2	23.1	7.5	30.4	0.56	0.39	470
3	23	7,44	30.6	0.61	0.18	440
4	23.2	7.54	30.5	0.52	0.07	180
5	23.4	7 62	30 4	0.88	0.07	160
6	23 4	7 54	29.5	0.23	0.43	60.4
7	22.9	7.56	30.8	0.83	0.21	23.7
8	24.2	7.83	30.5	0.14	0.4	8.28
9	22.5	6.97	30.4	0.52	0.56	7.6
10	24.7	7.56	30.2	0.32	0.32	91.5
11	23.2	7 31	30.4	0.73	0.26	467
12	23.1	7 12	30.2	0.17	0.4	5.99
13	23.5	7.38	30 3	0.31	0.47	4.04
14	23	7.06	30.3	0.4	0.54	2.8
15	23.7	7.36	30.5	2.05	0.36	260
16	23.3	7.22	30.4	0.72	0.1	530
17	23	7.14	30.3	0.27	0.43	7.56

7.2.1 当天模型

格數据分成训练和预测两部分(前14组数据为训练数据、后3组为预测数据)、通过对数 据的训练学习确定网络权重、并利用当天的参数数据计算当天的浮游植物密度。

网络结构一共三层,如图 7-4 所示。第一层为输入层,一共5个神经元、分别为水温 7、溶



解氣 DO、盐度、总氮和总磷的输入;第一层为隐层,共10个神经元;第三层为输出层、只有1个 神经元、即莽游植物密度。各层之间均为全连接。采用误差反传算法对数据进行训练并进行 细测计算。

网络各层的权重、训练和预测结果以及与实际结果的比较如表 7-2、表 7-3、表 7-4 和图 7-5 所示。

表 7-2 人工神经网络出天着型的输入层——隐居权值

	1人能	输入2	輸入3	輸入4	输入5
龍层单元 1	-0.718 267	- 0 216 203	- 0 545 868	0.320 741	0.328 222
隐层单元2	0.074 400	1.232 865	0.182 645	0.216 143	-0.844 433
應层单元3	0.378 847	0.079 513	-0.805 540	0.126 479	0.083 931
隐层单元4	- 0 035 771	- 0 774 300	0.073 520	0 393 762	- 0.245 258
施反单元 5	0.404 139	- 1.270 318	0 495 454	0.957 078	- 1 441 344
稳层单元 6	1 418 173	- 1.067 727	-0.013 942	- 0.150 046	+0.078 007
隐层单元7	- 2.527 854	3 182 386	0 118 786	0.232 620	0.411 087
隐层单元8	-0 500 070	0 723 310	- 1 130 429	- 0 547 095	0.797 746
施层单元9	- 2.250 972	1.221 322	-0 126 421	0.489 184	-0.393 268
施丛单元10	- 0.297 852	0 077 235	- 0.349 309	- 0.426 842	- 0.585 828

表 7-3 人工神经网络当天模型的隐居——输出层权值

输出单元	職居単元1	趣起单元2	稳足单元3	隐层单元4	龍层单元5
输出层权值	0.303 303	- 1 185 229	0.844 900	0 081 040	1.240 213
输出单元	隐层单元6	隐层单元7	總层单元8	隐层单元9	趣尼单元 10
输出层权值	- 0.857 450	1 519 909	1 273 866	- 2.644 059	0 636 958

表 7-4 训练结果及预测值与实际兼据比较

160 015 285

(10 个/㎡)

0.015 285

	45. 7*** \$11.30 901	本从洪 州 昌 7 大 市 本 李 化 弘	(40 1144 /
样本	实际数据	训练或预测结果	误差
1	148	148.009 239	0 009 239
2	146	146.065 025	0 065 025
3	31.1	30.914 431	~ 0.185 569
4	32	31.980 703	-0 019 297
5	31.8	. 31.621 352	-0.178 648
6	226	225.619 169	-0 380 831
7	9.72	10.088 851	0.368 851
8	148	148.021 298	0 021 298
9	187	187.034 285	0 034 285
10	10 5	10.480 414	- 0.019 586

160

11

样本	实际数据	训练或预测结果	误差
12	74.5	74.503 539	0.003 539
13	205	205 014 503	0.014 503
14	109	108 999 695	-0 000 305
15	125	101.059 556(预拠)	- 23 940 444
16	71.5	86.182 576(預測)	14.682 576
17	147	180.090 804 3(預測)	33.090 804 3

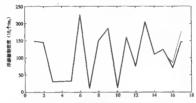


图 7-5 训练结果及预测值与实际数据比较

训练结果的平均误差为 0.094×10^6 个/ m^3 , 预测值的平均误差为 23.905×10^6 个/ m^3 , 标准 偏差为 43.400×10^6 个/ m^3 .

该模型具有一定的局限性。根据当天的各因子数据来计算当天的浮游植物密度,并不能对 实际的未测预测和防治起到按导作用。

7.2.2 预测模型

同样将数据分成训练和预测商部分,但网络结构有所不同,输入层增加一个神经元,即当 天的浮游植物密度,而输出层为第二天的浮游植物密度,这样可以根据当天所测得的各因子 教据以及浮游植物密度而测第二天的浮游植物密度,其中的时间间隔可以根据采集数据的条 作以及藻类生长规律进行选择。由于各因子对藻类生长的影响有滞后性,这样建立模型更具 有合理性,而且真正达到预测的效果。

网络结构如图 7-6 所示, 网络各层的权重、训练和预测结果以及与实际结果的比较如表 7-5、表 7-6、表 7-7 及图 7-7 中所示。

表 7-5 人工神经网络预测模型的输入是——输展权值

	輸入Ⅰ	输入2	输入3	输人4	- 権人 5	输入6
聯展单元 1	- 1.802 825	0.063 525	-1.088 660	0.545 153	0.498 579	0.737 376
豫层单元2	0 749 094	0.188 265	0.371 993	-2 065 964	2.258 873	- 1.404 734
灣层单元3	-1.475 871	0.357 201	1.397 959	-0 993 486	0.354 617	-2.416 061
職层单元 4	0.266 065	- 0.073 108	- 1.014 569	~ 0.368 921	0.666 635	0.119 301
隐层单元5	0.319 508	1.137 026	1.028 523	- 2.093 896	-1.007 556	0.953 536
隐层单元6	- 1.524 697	0.417 228	- 1.070 101	-0 169 420	0 635 955	0 708 722
總层单元7	0.927 459	0 024 746	- 0.404 394	0.823 187	-0.196 756	- 0.542 467
聽层单元 8	1.465 480	-0.837 450	-0.007 136	0 129 786	- 1.280 803	1 442 519
職屈单元9	-0.225 250	1.467 466	-0.300 940	-0 479 915	1.121 976	- 0 989 582
隐层单元10	0.859 611	1.147 990	- 2.170 308	1.345 184	-2.814 321	- 0.260 694

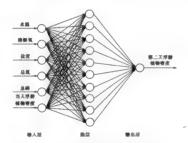


图 7-6 人工神经阿络预测模型的网络结构

表 7-6 人工神经网络预测模型的隐居——输出层权值

輸出单元	■原单元1	職层单元2	職层单元3	隐层单元4	職层单元5
輸出原权值	- 1 366 328	1 170 752	1 325 724	- 0 208 949	- 1 010 967
输出单元	施 层单元 6	職层单元7	■层单元8	職层单元9	施泾单元 10
输出层权值	-1.171 205	- 0.759 870	0.891 299	0 543 822	0.336 604

	表 7-7 训练给果及预测值与实际数量比较				
样本	实际数据	训练或预测结果	误差		
1	148				
2	146	145.998 080	-0.001 92		
3	31.1	31.099 390	-0.000 61		
4	32	31.999 160	-0.000 84		
5	31.8	31.800 649	0 000 649		
6	226	225.875 857	-0.124 143		
7	9.72	9.973 946	0.253 946		
8	148	147.998 896	-0 001 104		
9	187	187.001 528	0.001 528		
10	10.5	10.675 865	0.175 865		
II	160	160.001 044	0.001 044		
12	74.5	74.499 838	-0.000 162		
13	205	205 002 305	8.002 305		
14	109	109 003 192	0.003 192		
15	125	105.009(預測)	- 19.991		
16	71.5	34.483(頁側)	- 37.017		
17	147	147.537(預測)	0.537		

250 200 序瓣植物僵度(10,个/m,) 150 100 50 日期

图 7-7 训练结果及预测值与实际数据比较

训练结果的平均误差为 0.044×10⁶ 个/m³, 预测结果的平均误差为 19.182×10⁶ 个/m³, 标 准偏差为 42.074×10⁶ 个/m3。

7.2.3 经过优化后的人工神经网络预测计算

[,皮用遗传算法优化网络结构

上述權型中歲层单元的选取完全依靠經驗,因此不能保证网络结构的最优性。遺传算法可

以在保证计算的准确性的基础上优化网络的结构,将其应用于网络结构的优化,具体算法如下:

①随机产生多个编码串作为祖先群体,其中每一个编码串对应一种网络结构;

②解码,得到相应的网络结构,对每一种网络结构分别进行训练;

③根据训练结里计算每个个体的活应度或数值。

④选择一定数量适应度较大的个体直接遗传至下一代:

⑤对当代群体进行交叉、变异等遗传操作,产生下一代群体,④、⑤两个步骤产生的个体总 数据足程先定义的群体太小:

⑥重复步骤②~⑤,直到当前一代群体中的某个个体满足要求为止。

由于对网络结构优化的目标一方面是简化网络的结构,删除多余的胞节点;另一方面,还 要保持一定的精度。因此适应度函数应由隐节点数目和误差两部分组成,即

Fitness = $a \cdot N + \beta \cdot E$

式中:N、E 分别为预先定义的隐节点数目及误差;a、 β 为权重系数, $0 < \alpha$, $\beta < 1$,可根据要求具体设置。其他条数设置如下,

易大世代數 1,000 种群大小 50: 最佳个体數 10: 交叉率 0.2: 变异率 0.004。

2. 优化后的当天模型

经过优化后的人工神经网络的当天模型脆层只有5个神经元,其网络结构如图7-8所示。 网络各层的权重,训练和预测结果以及与实际结果的比较如表7-8,表7-9,表7-10和图7-9所示。



图 7-8 经优化后的人工神经网络当天模型网络结构

	輸入I	植人2	输入3	输入4	输入5
隐层单元 1	- 0.991 145	-0 477 054	-3 961 245	2.597 752	2 311 056
胞层单元2	0.512 693	0 658 072	0 577 414	-0 726 014	~ 1 970 721
施层单元3	0 258 567	2.765 120	0.947 446	- 1 333 359	- 2.776 343
隐层单元 4	- 2 806 502	3 529 013	- 3.231 765	- 1.324 166	2.933 554
隐层单元5	- 0.465 299	- 2.829 205	- 1.128 642	3 395 778	-0 797 738

表 7-9 经优化后的人工神经网络当天模型的隐居——着出版权值

输出单元	00层单元1	胞层单元2	職居单元3	隐层单元4	職层单元 5
輸出层权值	0.231 982	2.212 216	~ 1.515 701	2.101 761	2.021 609

	表 7-10 训练组	果及預測值与实际數据比较	(104 个/㎡
样本	实际数据	训练或强测结果	设施
1	148	147 987 841	-0.012 159
2	146	146.241 416	0.241 416
3	31.1	31.254 958	0.154 958
4	. 32	32.194 065	0.194 065
5	31.8	32.105 773	0.305 773
6	226	225.814 093	~ 0.185 907
7	9 72	10.402 757	0.682 757
8	148	148-576 419	0.576 419
9	187	186.895 496	- 0.104 504
10	10 5	10.479 369	~ 0.020 631
11	160	160.083 963	0.083 963
12	74.5	74.518 929	0.018 929
13	205	205 063 065	0.063 065
14	109	108.984 706	-0 015 294
15	125	105.760 739(預期)	+ 19.239 261
16	71.5	101 600 979(預衡)	30.100 979

250 (d) 200 (d) 200 (d) 300 (d) 300

146.762 000(到潮)

- 0 238

147

图 7-9 训练结果及预测值与实际数据比较

训练结果的平均误差为 0.189×10^6 个/ m^3 ,预测结果的平均误差为 16.526×10^6 个/ m^3 ,标 准偏差为 35.725×10^6 个/ m^3 。

3. 优化后的预测模型

17

经过优化后的人 L神经网络预测模型隐层共5个单元,其网络结构如图7-10 所示。网络各层的权重、训练和预测结果以及与实际结果的比较如表7-11、表7-12、表7-13 及图7-11 所

広。

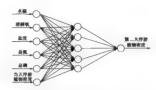


图 7-16 经优化后的人工神经网络预测模型网络结构

表 7-11 经优化后的人工神经网络预测模型的输入层——除层权值

	1人餘	输入2	输人3	施人4	输入5	输入 6
職屈单元	0 197 196	- 1.697 416	0.646 065	-0.371 352	- 0.397 853	1.670 572
總层单元2	1.385 218	0.071 142	1 316 068	- 2.018 926	4.231 406	- 5.302 988
龍屋单元3	0.366 167	-0.384 987	0.464 [40	0 009 431	-0.012 288	- 0.093 794
施区单元4	- 1.131 303	- 1.080 958	-1.689 495	0 082 333	1.211 909	0 960 175
隐层单元5	0.364 579	1 021 124	-2.552 955	1.894 906	- 1 967 531	-0.336 046

表 7-12 经优化后的人工神经网络预测模型的稳度——输出层权值

输出单元	際层单元Ⅰ	隐尼单元2	趣层单元3	職居並元4	總层单元 5
輸出层权值	1.038 154	1.099 077	- 1.158 533	-1 897 540	2.477 154

A 7 12	训练结果及强测信与实际数据比较	

	衰 7-13 训练结果及预测值与实际数据比较			
禅本	实际数据	训练或预测结果	误差	
1	148			
2	146	145.984 314	- 0.015 686	
3	31.1	31.057 497	-0.042 503	
4	32	32.034 989	0.034 989	
5	31 8	31.800 597	0.000 597	
6	226	225.356 819	-0.643 181	
7	9.72	10.059 984	0.339 984	
8	148	147.985 481	-0.014 519	
9	187	186.993 064	-0.006 936	
10	10.5	10.701 528	0.201 528	
11	160	160.008 09t	0.008 091	
12	74.5	74.496 682	-0.003 318	

			M.F.	
样本	实际数据	训练或预测结果	误差	
13	205	205.000 558	0 000 558	
14	109	108.999 568	- 0 000 432	
15	125	145.805 837(預衡)	20.805 837	
16	71.5	68.294 592(預測)	-3.205 408	
17	MIT	[2] [54 938(研制)	= 25 R45 062	

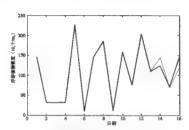


图 7-11 训练结果及预测值与实际数据比较

训练结果的平均误差为 0.101×10^6 个/ m^3 ,预测结果的平均误差为 16.619×10^6 个/ m^3 ,标准偏差为 33.334×10^6 个/ m^3 。

7.2.4 模糊神经网络预测

1.数据预处理

首先、为避免数据溢出,将数据进行归一化、标准化处理。归一化公式如下:

$$\begin{split} \bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \\ y_i &= x_i - n\bar{x} \\ \text{ees} &= \left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{x})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ x_i' &= \frac{x_i}{n \cdot \text{ees}} \end{split}$$

其中, x, 是原始样本值; x 是样本每列的平均值; n 是样本的个数; ees 是均方差; x', 是归一化以后的值。

标准化公式:

$$x_i'' = 0.9 - \frac{0.9[\max(x_i') - x_i']}{[\max(x_i') - \min(x_i')]}$$

其中、2"是标准化以后的值。

外理以后的数据如表 7-14 所示。

事 7.14 归一少标准少质的勤措

表7-14 日一化标准化加的数量						
桦本	水温	溶解氧	盐度	总算	总确	夜光葉密度
ı	0.245 45	0.183 71	0.592 3	0.208 9	0 867 33	0.1
2	0.318 18	0.593 02	0.653 84	0.275 92	0 622 44	0.809 15
3	0.281 82	0.537 2	0.776 92	0 380 63	0.279 58	0.763 69
4	0 354 55	0 630 23	0.715 38	0.259 16	0.1	0.369 93
5	0.427 27	0 704 64	0.653 84	0.409 95	0.1	0.339 64
6	0.427 27	0 630 23	0.1	0.137 7	0.687 75	0.188 79
7	0 245 45	0.648 83	0.9	0.389 01	0.328 56	0 133 2
8	0.718 19	0.9	0.715 38	0.1	0.638 77	0.109 8
9	0.1	0 1	0.653 84	0.259 16	0.9	0.108 83
10	0.9	0.648 83	0.530 76	0.175 39	0.508 16	0 235 9
Ш	0.354 55	0.416 28	0.653 84	0.347 12	0 410 2	0.804 6
12	0 318 18	0.239 53	0.530 76	0.112 56	0 638 77	0 106 39
13	0.463 64	0 481 39	0 992 3	0 171 2	0.753 05	0.103 44
14	0.281 82	0.183 71	0.592 3	0.208 9	0.867 33	0.101.50
15	0.536 36	0.462 79	0.715 38	0.9	0 573 46	0.491 0
16	0.390 91	0.332 55	0 653 84	0.342 93	0.148 96	0.9
17	0.281 82	0.258 14	0.592 3	0 154 45	0.687 75	0.106 7

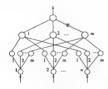


图 7-12 模糊神经网络结构模型

2. 睡期神经网络精育

(1)结构模型

结构模型如图 7-12 所示。该模型分为四层。

第一层为变量输入层。输入变量为 x_j , j=1,2,

···, n, n 为输入变量的个数。

第二层为模糊化层。该层的每个节点代表模糊 规则的前提部分, 其输入是第一层的输出, 其输出代 表每个输入变量对规则前提部分的隶属度。隶属度 或勒定用正则化高斯函数

$$C_{ij} = \exp \left[\frac{-\left(\left. z_{j} - v_{ij} \right. \right)^{2}}{\delta_{ij}} \right]$$

 $(i \approx 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n)$

其中:n 是模糊规则数;n 是输入节点数; v_q 、 δ_q 分别是高斯隶属度函数的中心和宽度。

第:层为模糊推理层。该层的模糊复合算子采用强积算子(sup product),则第 i 条模糊规 副的输出部分节点函数

$$u_i = \prod_{i=1}^{n} C_{ij}(x_j)$$

第四尺为去植鄉化——输出尺。该尺采用電心北越鄉化的方法。网络的輸出

$$y = \frac{\sum_{i=1}^{m} u_{i}\omega_{i}}{\sum_{i} u_{i}}$$

其中, ω. 易第三层第; 个节点到输出节点的耦合权值。

(2)機糊神经网络的学习算法

网络权值 $(v_{\alpha}, \delta_{\alpha}, \omega_{\alpha})$ 的学习算法采用 BP(误差反向传播)算法。

日标或物取为

$$E = \frac{1}{2}(\gamma - Y)^2$$

其中、 γ 是输出; Y 是目标矢量。按下列公式调整 v_i 、 δ_s 、 ω_i *的值,即

$$v_{ij}(t+1) = v_{ij}(t) - \eta \frac{\partial E}{\partial v_{ij}} + \beta \Delta v_{ij}(t)$$

 $\delta_{ij}(t+1) = \delta_{ij}(t) - \eta \frac{\partial E}{\partial \delta_{ij}} + \beta \Delta \delta_{ij}(t)$
 $\omega_{ij}(t+1) = \omega_{ij}(t) - \eta \frac{\partial E}{\partial \delta_{ij}} + \beta \Delta \omega_{ij}(t)$

其中, η 、 β 、 Δ 分别为学习率、动量项系数和误差项。

- 3. 网络的参数确定
- (1)确定输入变量个数 n

通常认为,5种理化因子对赤潮藻类浓度影响较大,所以输入变量为5个,即 n=5。

(2)确定最优规则数 m

本文采用 K - means 模糊療类算法來确定模糊系统的最优规則數,以最优规则數作为网络 的胞层节点数。该方法的最大危息是能快速找到系统的数据结构,但是精度不高。而神经阿 线的学习能力弥补了这个缺陷。

对归一化后样本(表7-14)进行计算,算法得出最优聚类数 m=3,样本1,6.9、12、13、14、17 属于第一类,样本2-5、11、16 属于第二类;样本7-8、10、15 属于第三类。

初始权值如表 7-15 所示。

赛 7-15 初始經億

类别	输入1	輸入2	输入3	输入4	输入5
1	0.6	0.665 11	0.715 38	0.391 I	0 512 24
2	0.302 6	0.296 67	0.521 97	0 178 98	0 771 71
3	0 354 55	0 535 65	0 684 61	0 335 95	0 276 86

(3)确定初始权值。

权值一般随着迭代是收敛的,但是者初始值太大,会使网络很快饱和。另外,初始权值对收缴速度也有影响。初始值只要不是过大,对网络的整体性能影响并不大。本节初始权值 ω,为 0.0%.

(4) 洗取适当的学习率 n 和动量项系数 8

学习率 η 若选得太小、会使网络参数修改量过小、收敛缓慢; 若选得太大、虽可加快学习 速度,但可能导致在稳定点附近的持续振荡,难以收敛。 ρ 的引人可以遗除学习过程中的高频振荡,使学习率可以取得较大值,从而加快网络的学习。 目前理论上还没有明确的确定学习率的方法,对于具体问题应取各种 η 、 β 组合比较实验。通过对比实验,发现选取 η = 0.015, β = 0.8 比较合适。

4、模糊神经网络预测赤湘藻类浓度

電測值与模糊神经网络的預測结果如图 7-13 所示。

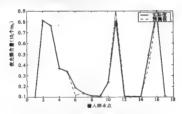


图 7-13 实测值和模糊神经网络输出比较

图中的"+"表示模糊神经网络的 17 个样本值。3 个预测值的结果比较见表 7-16。

桦本	实际删得值	BP 神经网络	RBF 神经网络	FNN 模糊神经网络	
6	0.188 79	0.117 12	0.168 79	0.188 77	
14	0.101 56	0.101 63	0.101.38	0.101 59	
15	0.491 09	0.489 38	0.489 94	0.491 34	

表 7-16 实测值与预测值结果比较

由以上结果可知模糊神经网络的预测精度较高,而且比 BP、RBF 网络的拟合结果都精确。

7.3 基于支持向量机的海水富营养化评价与浮游植物密度预测

近年来人工神经网络方法被广泛应用于海水水质富营养化评价以及赤獭寨类密度和浮游植物密度预测资产。但是人工神经网络建立的数学模型存在周个主要问题。①岩训练样本不足,则会运址;算模定等。②网络结构选择麻烦,应由于神经网络结构太大而出现收敛速度使、局部极小点和过报合现象。这样建立的模型就无法保证其具有较好的泛化能力和预测能力。支持向量机是 20 世纪 90 年代初期 Vapauk 等人根据统计学理论提出的一种新的通用的机器学习方法,它是建立在统计学理论中的 VC 维理论和结构风险最小原理 (Sucetural Riak Minimization Inductive Prnociple)基础上的,能较好能解决小样本、非线性、高维敷和局部极小点等实际问题,能有效地避免"过报和"。已成为机器学习学的研究热点之一,并已成功地应用于分类。函数通近和时间序列预测等方面。有鉴于此、本节将果用5VM 的分类和回归方法建立准木水配度者条件设价格型和表面《幂类异种植物物密》还测规程

7.3.1 支持向量机的工作原理

为了解释支持向量机是如何工作的,从线性可分模式的情况开始是最容易的,这里的可分模式是在模式分类的背景中出现的。在该背景中,支持向量机的主要思想就是通过最大化正负样本之间的分类间隔来构造 个起平血作为分类面。这一学习机器通过遵循统计学习理论的方法,来达到想要得到的性质。更精确地说,支持向量机是结构风险最小化方法的近似实现。

1. 餘性支持向量机

支持向量机的理论最初来自于对数据分类问题的处理。对于线性可分数据的二值分类,如果采用其他网络来实观,其机理可以简单描述为:系统随机地产生…个超早面并移动它,直到训练集合中属于不同类别的点正好位于该超平面的不同倾面,就完成了对网络的设计要求。但是这种机理决定了其最终处得的分割平面将相当靠近训练集合中的点。而在绝大多数情况下,次是然不是一个最优额。

而支持向量机方法很巧妙始解决了这一问题。该方法的机理可以简单描述为:寻找一个 而支持必要求的最优分类超平面,使得该超平面在保证分类精度的同时,最大化超平面两侧的 守白区域。从即於上来说,支持向量机能够实现均数性可分数据的最优分类。

具体来说、从悬简单的情况开始、考虑图 7-14 所示的二维两类线性可分情况、图中圈点和 方点分别表示两类的训练样本,相 为把两类没有错误地分开的分类线, H, 和 H, 分别为过各 类样本中离分类线最近的成且平行于分类线的直线、那么 H, 和 H, 之间的距离即两类的分类 间隔(Margin)。所谓最优分类线就是要求分类线不但能将两类无错误地分开,而且要使两类 的分类间隔最大。前者是保证经验风险最小(为0),后者实际上是为了使置信范围板小,从而 使实际风险最小,这是对结构风险最小化原则的具体实现。推广到高维空间,最优分类线就成 为最优超平面(Optimal Hypeplane)。这可以用公式化形式表示如下。

假定训练數操 (x_i,y_i) , $i=1,2,\cdots,l$, $x\in\mathbb{R}^*$, $y\in \{+1,-1\}$, 可以被超平面 $\omega^{\mathsf{T}}\cdot x+b=0$ 分开, 其中 $\omega\in\mathbb{R}^*$ 。为使超平面对所有样本正确分类,就要求它满意如下约束:

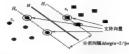


图 7-14 最优都平面示意图

$$y_i(\omega^T \cdot x_i + b) - 1 \ge 0$$
 (7-24)

由于分类间隔等于2/ | ∞ || . 于是可以在歐从約束式(7-24)的条件下利用最小化 || ∞ || . 的方法未最大化分类问隔。因此,求解最优超平面问题就可以表示成如下的约束优化问题,即 存备件式(7-24)的约束下、资品酸

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{2} \|\omega\|^2 = \frac{1}{2} (\omega^T \cdot \omega)$$
 (7-25)

的最小值。

支持向量(support vectors)就是使式(7-24)中的等号成立的那些样本,如图 7-14 中用圆圈标出的点所示。对这些学习根据来说、支持向量是训练集中的关键元素、它们离决策边界最近、如果去维所有其他训练点(或者移动位置,但是不穿總用,或 H,),再重新进行训练、得到的分类面是相同的。在下面的水解过程中可以看到,正是支持向量而不是其他的样本点对最优超平面的水解对解的作用。

为求解最优超平面,定义如下的 Lagrange 函数:

$$L = \frac{1}{2} \| \omega \|^2 - \sum_{i=1}^{l} a_i y_i (x_i^T \cdot \omega + b) + \sum_{i=1}^{l} a_i$$
 (7-26)

其中, α ,>0为 Lagrange 系數。現在的问题是关于 ω 和b 对L求最小值。这就意味着可以先对 等地解决一个较为简单的"对偶"问题,即求 L 的最大值。其约束条件为 L 关于 ω 和b 的梯度 均为 0 以 α , ∞ 0。即需要在约束条件

$$\sum_{i=1}^{l} \gamma_{i} a_{i} = 0 \quad (a_{i} \ge 0; i = 1, \dots, l)$$
(7-27)

下对 a, 求解下列函数的最大值:

$$\overline{W}(\alpha) = \sum_{i=1}^{l} a_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{l} a_i a_j y_j y_j (x_i^T \cdot x_j)$$
 (7-28)

如果 a; 为最优解,那么

$$\omega^* = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i^* y_i x_i$$
 (7-29)

即最优超平面的权系数向量是训练祥本向量的线性组合。 这是一个不等式约束下的二次或数极值问题、存在唯一解,而且根据 Kuhn-Tucker 条件,这

个优化问题的解必须满足:

$$a_i\{[(x_i^T \cdot \omega) - b]y_i - 1\} = 0 \quad (i = 1, \dots, l)$$
 (7-30)

因此,对多數样本 α ,将为零,取值不为零的 α ,对应于使式(7-26)中的等号成立的样本,即支持向量,它们通常只是全体样本中很少的一部分。

求解上述问题后得到的最优分类必数是

$$f(x) = sgn[\sum_{i=1}^{l} y_i a_i^*(x_i^{T_i} x) + b^*]$$
 (7-31)

由于非支持向量对应的。,均为0.因此上式的求和实际上只对支持向量进行。b*是分类 的腐焦,可以由任意一个支持向量用式(7-26)求得,或通过两类中任意一对支持向量取中值求 (8.

在线性可分情况下,在条件式(7-26)中增加一个松弛项 ζ≥0,于是成为

$$v \left[\left(\mathbf{a}^{\mathsf{T}} : \mathbf{x} \right) + b \right] \ge 1 - \mathcal{E} \quad (i = 1, \dots, l)$$
 (7-32)

因此,目标就是在式(7-32)约束条件下求下列函数的极小值:

$$\Phi(\omega, \zeta) = \frac{1}{2}(\omega^{T} \cdot \omega) + C(\sum_{i}^{l} \xi_{i}) \qquad (7-33)$$

即折中考虑最少储分样本和最大分类间隔, 就得到了线性不可分情况下的最优超平面, 称作广 义最优超平面。其中 C > 0 为某个指定的常数, 它控制对储分样本的惩罚程度。线性可分模 式的最优化问题是作为一种特殊的情形包含在附才所述的不可分模式的最优化问题中。特别 她,在式(7-32)和式(7-33)中,对所有 i 令 E = 0,即可得到相应的线性可分模式时的形式。不 可分模式和可分模式的鉴别被在于;可分模式中的约束条件。。≥0;在不可分模式中, 换为更 严格的条件 0 € a 。 ∈ C 。 除了这一修正,不可分模式的约束最优化问题以及权值向量 a 和偏 身 b o B 是依例计算都和线性可分模式中的过程是相同的。

2.非线性支持向量机

在输入空间中构造最优分类面的方法类似于经典的感知器(单个神经元)方法。这种方法 位当样本集为线性可分时才能使经验误影等于零。由于许多问题都不是线性可分的,因此用 诠释方法。程确的编章者由于经验误差的活动失去意义。

解决这个问题的第一个途径起多层感知器,其实质就起将近似函数集由简单线性指示函数扩展战由许多线性指示函数量加度的一个更为复杂的近似离数集,再用 S型函数来近似指 示函数中的单位阶联函数(或符号函数),从而得到使经验谋差极小化的一种容易操作的算法。 但是,这种方法存在着容易陷入局部极小点、网络结构设计依赖于先验知识、由于缺乏理论基础从而难以控制似及泛化能力较是这些问题。

第二个途径是将输入向置映射到一个高维的特征向置空间,并在该特征空间中构造最优 分类面,这就是女持向置机方法。它能够避免在宏层前间网络中无法克服的上述问题,并且经 证明,如果选用适当的映射函数,大多數输入空间线性不可分的回题在特征空间可以化为线性 可分问题来解决。

由于在低维輸人空间向高维特征空间映射过程中,空间维数急速增长,这就使得在大多数 情况下难以直接在特征空间计算最佳分类平面。支持向量机通过定义核函数(kernel function),万分映纸按一问题转处到输入空间进行计算、其具体机理如下。

可以注意到在上面的问题表解中都只涉及內积运算,因此假设有非线性換射 Φ : $\mathbf{x}^* \mapsto \mathbf{B}$. 将输入空间的样本映射到高端特征空间 \mathbf{H} 中。当在特征空间中构造最优超平面时,训练算法 仅使用特征空间中的点税,即 $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{l}^*, \mathbf{o}(\mathbf{x}_i)$ 。所以,者能找到一个面数 \mathbf{K} 且使 $\mathbf{K}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)$ = $\Phi(\mathbf{x}_i)^*$ · $\Phi(\mathbf{x}_i)$

根据泛函的有关理论,只要一种函数 $K(x_i,x_j)$ 满足 Mercer 条件,它就对应某一变换空间

中的内积。因此,在最优分类面中,采用满足 Mercer 条件的内积函数 K(x,x,y)就可以实现某 :非线性变换后的线性分类,而计算复杂度却没有增加,此时的决策函数就变为

$$f(x) = \operatorname{sgn} \left[\sum_{i=1}^{l} y_i \alpha_i^* K(x_i, x) + b^* \right]$$
 (7-34)

算法的其他条件均不变。由于最终的判别函数中实际只包含支持向量的内积以及求和,因此 识别时的计算复杂度取决于支持向量的个数。



图 7-15 支持向量机示意图

由图 7-15 可以需出,支持向量机求得的决策函数形式上类似于一个神经网络,其输出是若干中间层节点的 线性组合,而每一个中间层节点对应于输入样本与一个 支持向量的内积,因此也被条件支持向量网络。在式(7-34)中,满足 Menoer 条件的内积函数 K(x,x) 称为核函 数。而偷给出一个具体的核函数的例子。

如图 7-16(a)所示,數据样本 $x_i \in \mathbf{R}^p (i=1,\cdots,l)$,选 择核函数 $K(x_i,x_i)$ 为多项式核函数 $K(x_i,x_j) = (x_i,$ $x_j)^2$,那么目的是寻找一个满足如下条件的空间 H 和映 射 ϕ :使映射 ϕ 将数据从 \mathbf{R}^p 空间映射到 H 空间,并且满

 $E(x^T, y)^1 = \Phi(x)^T, \Phi(y)$ 。 满足该条件的空间 H 和映射 Φ 是很容易找到的,当 $H = \mathbf{R}^T$ 以及 $\Phi(x) = (x_1^1, \sqrt{2}x_1x_2, x_2^1)^T$ 时即可满足以上条件。对于一个特定的核函数,映射和特征空间的选择并不是唯一的。

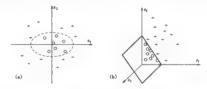


图 7-16 支持向量机用于二维样本分类 (a) : 维空间; (b) : 维空间

图 7-16 表示了上述对"维样本进行分类,用二阶多项式作为映射函数的变换过程。在图 7-16(a)中,原始二维空间中必须要用一个椭圆形的非线性分类器才能分开,而通过二阶多项 玄变换将敷据映射到三维特征空间中。在图 7-16(b)中,可以看出两类数据用一个线性的分类面数可以分开。

3.核函數

不同的核函數可以构造实現輸入空间中不同类型的非线性决策面的学习机器,常用的核 函数如下。

①多项式核函数(d 阶)

$$K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = (\mathbf{x}_i^T \cdot \mathbf{x}_j)^d$$

d=1时为线性核函数。

②谷向基函数(RBF 高斯核函数)

$$K(x_i,x_j) = \exp\{-\gamma \parallel x_i - x_j \parallel^2\}$$

其中 ソン0日 ソニ1/ペー

所得的分类器与神经网络 RBF 算法根本的区别是,每个经向基系数的中心对应一个专特 向量, 网络结构及其网络权值由复法自动确定。

③多层感知机(sigmoid 函數)

 $K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) = \tan(v(\mathbf{x}_i^T \cdot \mathbf{x}_i) + d)$

这时的 SVM 算法中旬含了一个脑层的多层感知器, 脑层节点数是由算法自动确定的, 而 日黨法不存在困扰神经网络的局部极小点的问题。

核函数的参数应当仔细选取,它和设势惩罚因子(C. 县影响 SVM 性能的主要因者。从上而 的讨论可以看出,具体应用 SVM 的步骤为,先选择适当的核减数,再求保优化方程, 获得专持 向量和相应的拉格朗日算子,最后写出最优分解而。

4. 支持向量机回归原理及算法实现

SVM 用来估计回归函数时,有3个特点。

①利用在高维空间中完 》 的线性函数集变估计同归,

②利用线性最小化来实现回归估计,风险是用 Vannik 的 E 不触感视失函数来度量的:

③采用的风险函数基由经验误差和一个由结构风险最小化原则导出的正则化部分组成 ġά.

给定一个数据集 $H=\{(x_i,y_i)\}, i=1,2,\cdots,n,$ 其中 x_i 是输入向量 x_i 是期望值 x_i 是数 握占的总数。估计函数如下。

$$f(x) = \exp(x) + b$$
 (7-35)
其中, $\varphi(x)$ 是从输入空间到高维特征空间的非线性映射,系数 ω 由以下最小化式(7-36)来估

#: (7-36)

$$R_{reg}[f] = R_{sep}[f] + \lambda \parallel \omega \parallel^{2} = \sum_{i=1}^{n} C(f(x_{i}) - y_{i}) + \lambda \parallel \omega \parallel^{2}$$

$$C(f(x_{i}) - y_{i}) = \begin{cases} |f(x) - y| - \varepsilon & (|f(x) - y| \ge \varepsilon) \\ & (|f(x) - y| \ge \varepsilon) \end{cases}$$

$$(7-36)$$

$$C(f(x_i) - y_i) = \begin{cases} |f(x) - y| - \varepsilon & (|f(x) - y| \geqslant \varepsilon) \\ 0 & (\sharp \acute{\mathbb{R}}) \end{cases}$$
 (7-37)

在式(7-36)给出的正则化风险泛函中, $R_{***}[f]$ 是经验风险, 它由式(7-37)给出的 ε 不數帳提 失函数来度量。损失函数的用途在于它能够用稀疏数据点来表现由式(7-35)给出的决策函 数。C是正常数,它决定着经验风险和正则化部分之间的平衡。第二部分 λ | ω | 2 显正则化 部分。

为了寻找 ω 和 b、需要引入松弛变量 ζ 和 ζ*,使式(7-38)最小化,式(7-39)为约束条件:

$$\frac{1}{2} \parallel \mathbf{c} \mathbf{c} \parallel^2 + c \sum_{i=1}^{n} (\zeta_i + \zeta_i^*)$$
 (7-38)

$$\omega^{T}\varphi(x_{i}) + b_{i} - y_{i} \leq \varepsilon + \zeta_{i}^{*}, \zeta_{i}^{*} \geqslant 0$$

 $y_{i} - \omega^{T}\varphi(x_{i}) - b_{i} \leq \varepsilon + \zeta_{i}^{*}, \zeta_{i}^{*} \geqslant 0$

$$(7-39)$$

最后,通过引人拉格朗日算子,由式(7-35)给出的决策函数就变成下面的精确形式:

$$f(\mathbf{x}, a_i, a_i^*) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_i^*) K(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) + b$$
 (7-40)

要找到所求的向量 $\omega = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_i^*) x_i$,必须找到最小化二次型

$$L(a_i - a_i^*) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} (a_i^* - a_j) \left(\sum_{j=1}^{n} (a_j^* - a_j) K(x_i, x_j) \right)$$

$$- \sum_{i=1}^{n} a_i^* (y_i - \varepsilon) - a_i (y_i + \varepsilon)$$
(7-41)

的参数 a_i 和 a_i^* , $i=1,2,\cdots,n$, 其约束条件是 $\sum_{i=1}^n a_i^* = \sum_{i=1}^n a_i^*$, 且 a_i^* 、 $a_i^* \in [0,c]$ 。

在式(7-40)中, $(a, -a^*_i)$ 的非零值对应的数据点载是支持向量、一般来说, ϵ 值越大,支持向量数日數越少、因而編單経確。利用以上约束各件可以編出条數 b。

7.3.2 基于 SVM 的海水富营兼化评价

水体富营养化程度的评价方法是现代环境科学基础理论研究的重要课题。富营养化评价 处于"规划的模式识别问题"影响水质的因素很多,评价指标与水质标准等级之同是复杂的非线 性关系。

利用支持向量机方法进行海水富异养化程度评价,首先要确定影响海水富营养化的主要 影响肉素,其次选择样本数据集,然后利用 SVM 进行学习训练,最后根据训练后获得的模型进 行计算,得到课价值。

天然水体中, 藻类利用光和 CO, 合成本身原生质的基本反应式如下:

C₁₀₁H₂₆₃O₁₁₀N₁₆P₁(浮游植物)+138O₂

从上式可以看出,光合作用的限制性因家主要为戴,确营养盐,藻类的繁殖使水体中的有 机物,时均最和獭类细胞浓度增加。因此,选择 CDD,无机氮、无机磷,叶均素 a 浓度和浮游植 物(Phytoplankton)细胞丰度 5 种指标作为海水富茜非化的评价指标。根据海水质量标准和研 完成果,制定如下评价标准(见表 7-17)。

评价指标	1 贫营养	正中营养	皿 富贵养
COD(mg/L)	1	2	3
PO ₄ - P(mg/L)	0.01	0.03	0.045
TN(mg/L)	0.1	0.2	0.3
$Chl = o(mg/m^3)$	2	5	10
Phytoplankton(10 ⁶ 个/m ³)	25	30	150

表 7-17 海水水质评价标准

为了保证足够的精度,需要将分级标准插值加密。这里用线性插值的方法将分级标准加密 1 倍,即分成更小的级别。将水质高营养化程度 2 个等级的评价标准作为支持向量机的"学" 2 倍,即分成,将模型的输出值 (0.1) 区间电进行划分,分别对应水质的 3 个级别,这样就可以得到与模型输出相对应的分级评价标准(见表 7-18)。

事 7,18			

水质级别	1贫营养	且中营养	田富貴养	
数据区间	0 0 333	0 333 0,666	0 666 - 1 000	

将线性插值得到的分级标准写成矩阵形式、干量得到训练矩阵

	0	0.500 0	1.000 0	1.500 0	2.000 0	2.500 0	3.000 0
	0	0.005 0	0.0100	0.0200	0.030 0	0.035 7	0.045 0
λ	(5×7 = 0	0 050 0	0.1000	0.150 0	0.200 0	0.2500	0 300 0
	0	1.000 0	2.000 0	3.500 0	5.000 0	7.500 0	10.000 0
	-0	12.500 0	25.000 0	37.500 0	50 000 0	100.000 0	150.000 0

相应的期望输出矩阵

 $Y_{1\times 7} = [0 \quad 0.1665 \quad 0.3330 \quad 0.4995 \quad 0.6660 \quad 0.8330 \quad 1.0000]$

利用 Matlab 软件分别编制 SVM 和神经网络(ANN)算法、ANN 采用多层前馈网络模型, SVM 算法的结构示意图如图 7-15 所示、ANN 网络训练收敛情况如图 7-17 所示



图 7-17 人工神经网络训练过程中网络收敛情况

复海域不同站位的水质实测数据的矩阵

$$\mathbf{Z}_{\tau_{x,12}} = \begin{bmatrix} 1.65 & 2.01 & 1.96 & 1.66 & 1.56 & 1.39 & 1.42 & 1.35 & 0.98 & 1.28 & 1.06 & 1.17 \\ 0.031 & 0.06 & 0.033 & 0.060 & 0.052 & 0.012 & 0.025 & 0.007 & 0.017 & 0.07 & 0.014 & 0.01 \\ 0.472 & 0.735 & 0.509 & 0.709 & 0.258 & 0.485 & 0.152 & 0.164 & 0.146 & 0.131 & 0.281 \\ 7.37 & 4.63 & 4.65 & 5.43 & 3.82 & 5.96 & 4.84 & 7.74 & 2.42 & 6.87 & 7.25 & 7.57 \\ 262.06 & 5.25 & 197.50 & 11.9 & 27.57 & 21.51 & 11.36 & 111.57 & 82.34 & 81.71 & 107.16 & 388.17 \end{bmatrix}$$

将 X₁, Y₁, Z₁, 分别除难化,然后输入到编字的 SVM 和 ANN 程序中,两种方法所得的 计算结果如表7-19 所示。可以看由站位测点 1,2,3,4,5,7,9,12 基本一致。测点 6,8,10,11 的 SVM 评价结果为 1 级。而神经网络评价结果为 II 级。实际上这 4 个测点 水饭的 5 项指标中 均存 3 项指标未超过 III 级。所以 SVM 方法将上述站位测点水质评为 II 级更为合理。从评价 结果来看,利用 SVM 方法建立的评价模型,能免分利用训练样本的分布特件,评价结果与实际 储况更为相称、为能水富滑等化评价 及其体积级质量价值 下提银供了 "参新的有效的方法

旁 7-19 其高體水管评价结果

站位	COD (mg/L)	PO - P (mg/L)	TN (mg/L)	(mg/m³)	Phytophynkion (10 ^a 个/m²)	神经柯络 计算结果	SVM 计算结果	高营养化 等級
1	1.65	0.031	0.472	7.37	262.06	0.833 0	0.803 084 0	田高雲养
2	2.00	0.060	0.735	4.63	5.25	0.572 3	0.552 631 6	11 中营养
3	1.96	0.033	0.509	4.65	197.50	0.833 0	0.823 220 1	111 高青卵
4	1.66	0.060	0.771	5.43	11.91	0.567 7	0.552 022 0	II 中資券
5	1.56	0.052	0.794	3.82	27.57	0.563 0	0.551 772 3	日中营养
6	1.39	0.012	0.238	5.96	21.51	0.832 6	0.551 173 7	11中营养
7	1.42	0.025	0.458	4.84	11.36	0.542 6	0.577 882 5	II 中营养
8	1.35	0.007	0.152	7.74	111.57	0.833 0	0.580-519 1	□中营养
9	0.98	0.017	0.164	2.42	82.34	0 532 9	0.489 717 1	H 中营养
10	1.28	0 007	0 146	6.87	87.71	0.833 0	0.543 583 0	日中营养
11	1.06	0.014	0.131	7.25	107.16	0.833 0	0.569 936 3	H 中营养
12	1.17	0.010	0.218	7.57	388 17	0.833 0	0.832 319 7	田高雲非

海水的富营养化评价是个典型的模式识别问题,影响水质的因家很多,评价指标与水质标准等级之间是复杂的非线性关系,支持向量例理他随股功应用于海水的富营养化评价。运用支持向量机理论评价海水成的富营养化程度,只需把相应的实际观测数据提供给程序,利用 并且 机力 计算机分析计算 就可 长持评价 结果 风面 与传统评价 方法相比,该方法计算简便、快嫌、精度高,具有较大的实用性。而且评价结果具有客展性,避免了模糊综合评价和灰色繁类等方法权 意赋值和隶属函数确定中的人为因家的影响,减少了评价过程中的人为主观因繁。与人工神 经网络评价方法相比,支持向量机能充分利用训练样本的分布特性、解决了样本数据不足带来 的问题,能根据部分训练样本构建判测微数,不需要过多的先验信息和使用技巧,还能根据有限的样本信息在模型的复杂性和学习能力之间寻求最佳折中,保证具有较好的近代性能用

7.3.3 基于 SVM 的浮游植物密度预测

赤潮是一种常见的海洋污染现象,引发赤潮的机理相当复杂。当海洋的物理化学环境运 台于藻类暴发性繁殖时,即能产生赤潮。通过对平时和赤潮发生时的海洋化学数据的挖土, 明多种因禀对赤潮发生的对应关系,有助于建立赤潮发生的数学模型,了解赤潮发生的机理。

1 计算样本的构象及数据的预处理

仍然根据蔡如蛭 1997年的调查数据(表 7-1),共計 17 个样本,浮游植物和夜光幕的监测 核(梅祥调皮规范)(国家海祥局,1975)进行, 水文,理化因子的采样及分析按(梅祥污染调查暂 行规范)(国家海祥局 1979)执行。各种理化因子有水温(T)、溶解氧(DO)、盐度(S)、总氮(N)、可解性 无机藏(P)、浮游植物密度(F)等。

为了对原始数据中的冗余信息进行处理。提取所有有用信息、首先更对数据进行平滑处理 (除奇异伯)。为了解通性数据提配化、统之格、一个小的特定的区域[0,1]、要对原始数据 进行归一化处理(防止计算溢出)、对样本的输入和输出参数分别用下式进行归一化处理。

$$y_i = \frac{z_i - z_{\min}}{z_{\min} - z_{\min}}$$

式中,z,和y,分别为归一化前后的变量;z,和z,一分别为z的最小和最大值。将数据分成训练和预测两部分(前 | 4 组数据用于训练。后 3 组数据样本用于预测效果检验)。

2. 基于 SVM 的浮游植物密度预测步骤

亦補藥类密度的預測是一个多变量預測问题,它可被看成函數回归问题。浮游植物(藥类)密度,为函数的輸出值,而相应的影响浮游植物密度的因素如,水溫(7),溶解氧(DO),盐度(S),总真(N),可溶性无机磷(P)等作为函数输入值 z。问题的最终目的是寻找一个有良好推广能力的从影响浮游植物密度的端水埋化因素到浮游植物密度的映射,其基于 SVM 的浮游植物密度預測的步骤为。

- ①对数据进行平滑处理(剔除奇异值)和归一化处理(防止计算溢出),然后形成样本集; ②用训练样本建立目标函数;
- ③利用序列极小化(Sequential Minimum Optimization, 简称 SMO)算法求解目标函数(二次型);

④将求解目标函数所得的参数 a, 和 a, 代人式(7-40),将得到的拉格侧日算子代人预测 函数中,并利用样本对未来某一时刻的浮游植物密度进行预测。

基于 SVM 方法进行浮游植物密度预测程序的逻辑框图如图 7-18 所示。

3.核函数的选择及其参数的确定

使用支持向量回归(SVR)方法預測浮游植物密度,首先要确定 ε 不敏感值、惩罚因子 C, 选用核函数及其参数 y。在这过程中,第一要选择一个模型。即一个核函数。首先,选用线性 的核函数,发现效果很不好。这说明数据复杂度比较高,在线性情况下是不可分的。然后确定 适用径向(RBF)核函数。不选多项式的原因是模型参数确定比较复杂。同时,经随机选择一些 参数测试,技结果也不是令人很满意。



图 7-18 基丁 SVM 方法的浮游植物密度预测逻辑框图 注:点对(i,j)表示参数下标为(i,i)的子规划问题

接下来,需要确定模型的参数,即公式 $K(x_1,x_2) = \exp[-\gamma \|x_1-x_2\|^2] (\gamma > 0)$ 中的 γ ,以 及惩罚程度的常数 C。确定参数的过程中用了交叉有效和网络搜索这两个有效的方法。下面 简单介绍这两种方法,以及相应的应用过程。

①交叉有效就是将数据首先分成 n 个同样大小的子樂,然后用 n-1 个子樂作为训练样本,預測那个没有参加训练的子樂,就这样一个接一个进行至 n 次。全部数据中的每个样本点都稀預測一論,准确率是比较稳定的。

②网格搜索首先选定一组 C、y 的范围: $C = 2^{-6}, 2^{-3}, \cdots, 2^{10}$ 和 $y = 2^{-16}, 2^{-12}, \cdots, 2^{11}$ 然后 将它们的准确率用等高线连接是来绘出图形: 如图 $7 \cdot 19(a)$ 所示。最后确定准确率出现最高 的一段调小步长, 再确定一组参数 $C = 2^{11}, 2^{11}, \cdots, 2^{11}$ 和 $y = 2^{-10}, 2^{-13}, \cdots, 2^{-6}$ 如图 $7 \cdot 19(a)$ 所示。

反复进行以上步骤,由此,这里选定 $C = 100, \gamma = 0.01, \epsilon = 0.001$ 。

4. 基于 SVC 的计算结果分析

对样本分类结果进行评价时,通常采用的方法是留 法(leave-one-out, LOO)和独立检验 法。留 法是指每次主除1个样本,构建新的分类器,然后对所去除的样本进行分类,统计错 误分类的次数。独立检验法格排本,构建新和训练集,即随机将数据分为 k 个子集合,依 次取出一个子集作为测试集,而其余的 k - 1 个了集合作为训练集。利用分类器,对测试集的 样本分别进行分类,计算循误分类的次数,此过程循环 k 次。

取表 7-1 中样本數据,用支持向量分类(SVC)算法建模、经过前文的讨论、筛选核函数,得 知用 y=3 的径向(RBF)核函数 $K(x_i,x_i)=\exp[-y'|x_i-x_j||^2|$ 时的预报效果最佳。 计算表

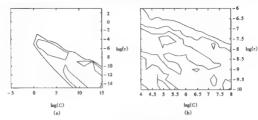


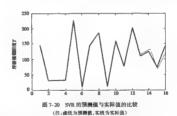
图 7-19 网络参数法租分图与细分图

 $0.676(\pm) + 0.731(DO) - 0.615(S) + 1.110(N) - 1.69(P) - 0.249(F) - 0.819 > 0$

5.基于 SVR 的计算结果分析

通过对不同的不敏感值 « .惩罚因子 C 及核参数 y 的试验, 在研究中发现, 核参数 y 和 C 对 SVR 算 接的表现起到非常重要的作用,而 e 即率响支持向量的数日。当把 C 和 ε 分别配定 100 和 0.00 时,训练的标席均为差随着 y 的碳小面增大, 另一方面 测试维的标准均方差随着 y 的碳少面增大。这表明 y 的值 (本) 下。 10 和 0.00 1 时)会对训练集造成次学习残象,y 的宽恒应当在 0.01 ~ 1.2 何,此时训练教输 定。由此可见,y 对 SVR 的泛化能力起着关键作用。当分别把 y 和 e 固定在 0.01 和 0.000 时,训练集的标准均方差形的运输减小。当付,当一次的 e 的增大面单调减小。同时,当 C 的值从 0.1 增大到 200 的时候,测试集的标准均方差开始运输减小;当 C 的值从 10 增大到 200 的时候,测试集的标准均方差开。 其原因在 于小的 C 值会对训练数据造成大学习残象。C 的值太大容易求训练数据造成学习现象面导致 化能力恶化 因此 C 的适合值应在 10 - 200 之间。当分别把 y 和 C 固定在 0.01 和 100时,训练集和测试集的标准均方差带。常能定 C 的值、当分别把 y 和 C 固定在 0.01 和 100时,训练集和测试集的标准均方差带。常能定,因而不定。 值空化的影响。这表明,SVR 的性能对 & 不敏感,然而,支持向量的数目的随着。的增大而减少。

	表 7-20 SVR 训练集果及预测值与实际数据比较 10° 个/m²					
样本号	实际数据(浮游植物密度)	训练或预测结果	误意			
L	146					
2	146	145.986 461	- 0.013 539			
3	31.1	31.058 669	- 0.041 331			
4	32	32.046 362	0.046 362			
5	31.8	31.801 675	· 0.001 675			
6	226	225.938 684	-0.061 316			
7	9.72	9.759 849	0.039 849			
8	148	148.012 786	0.012 786			
9	187	186 979 937	- 0.020 063			
10	10.5	10.990 355	0.090 355			
JL	160	160.028 788	0.028 788			
12	74.5	74 600 026	0.100 026			
13	205	204.998 358	- 0.001 642			
14	109	108.979 764	-0.020 236			
15	125	135.006 635(預興)	10.006 635			
16	71.5	68.689 974(預測)	- 2.810 026			
17	147	122 219 474 (REMI)	- 23 690 526			



SVR 训练结果的平均误差为 0.034 × 10⁶ 个/m², 预测结果平均误差为 12.166 × 10⁶ 个/m³, 标准偏差为 14.931 × 10⁶ 个/m²。

6.与人工神经网络方法所得计算结果的比较分析

虽然神经网络与艾特向量机在结构上具有一定的相似之处。但它们的优化算法存在着本 原的差别。神经网络是迟隆颖风雕品小征则进行优化的,容易产生过度拟合,并且易于陷入 局都极小点。支持向量机是迟结构风险量小化原则为基础的,这就使得支持向量机具有更好 的泛化能力,并且该算法是--个凸优化问题。因此局部最优解---定县全局最优解。

为了便于比较分析兩种預測方法的预測性能,采用以下两个统计量来评价模型的拟合程度和预测效果,这两个统计量是均方根误差 RMSE(标准偏差)和平均绝对误差 MAE(平均误参)。

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (z_i - \hat{z}_i)^2}$$

$$MAE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} |z_i - \hat{z}_i|$$

人工神经网络模型的训练结果的平均误差为 0.044 × 10⁴ 个/m², 预测结果的平均误差为 19.182 × 10⁴ 个/m², 旅港偏差为 42.074 × 10⁴ 个/m².

	表 7-21	预测模型对比试验	弟果	(10 ¹ ↑/m ³)
支持向:		机(SVM)	人工神经	明络(ANN)
WC/E	叔和數据	顶褐敷掘	拟和数据	预测数据
标准偏差	0 046	14.931	0.086	42.074
平均误差	0.034	12.166	0.044	19.182

从表 7-21 可以看出, 无论是拟合能力, 还是预测能力, SVM 方法都明显优于 ANN 方法, SVM 方法表现出了较强的泛化(预测)能力。多元回归方法预测能力量低。

在对实际监测数据的仿真试验中,SVM 方法能充分利用训练样本的分布特性、根据那分 训练样本构建判别函数、不需要过多的先验信息和使用技巧、并最纯转化为二次寻优问题。从 理论上说、得到的转是全局量优解,从而有效避免了神经网络易陈人的局部极值、泛化能力低 的问题,同时遇过非线性变换和核函数巧妙解决了高维数问题,使得其算法复杂度与鲜本维数 无关、加速了训练学习速度。另外、它膨根据有限的样本信息在模型的复杂性和学习能力之间 寻求量任何中、保证主有控射的近代性能。

7.4 知识发现在海洋监测中的应用

Jason Bobbin (2001)认为机器学习所获得的知识能够帮助对生态行为之间的因果关系形成 更深入的认识,或者直接描述分类的规则。这方面的研究和应用在国外才刚刚开展,而在国内 文献中尚未见到。本章会试将知识发现中的决策柯算法应用于赤潮的预测预警系统研究之中。

7.4.1 知识发现介绍

1. 知识发现概述

数据库管理系统和人工智能中机器学习这两种技术的发展和结合,促成了在数据库中发 现知识(KDD)这一新技术的诞生。1989年8月,在美国底特律召开的第11届国际人工智能联 合会议的专题讨论会上,KDD 被首次提出。它是一门交叉性学科,涉及机器学习、模式认别、 统计学、智能数据库,知识策取,数据可提化,高性能计算,专家系统等领域,内器被为广泛,理 所谓知识发现。就是从数据集中识别出有效的、新颜的、潜在有用的,以及最终可理解的模 仍 个过程。也有一些文献把数据挖掘称为知识抽取(knowledge extraction)、数据考古学 (data archaeology)、数据推荐(data fardqing)等等。多数人认为数据答题是、KDD 过程中的关键 步骤,从而不加区分地使用知识发现和数据挖掘这两个术语。相对来讲,数据挖掘主要流行于 统计界,最早出现于统计文献中)、数据分析、数据库和管理信息系统界;而知识发现则主要流 行干人 厂智能和组据学习界。

知识发现与传统数据分析工具的主要区别在于它们探索数据关系时所用的方法不同。传 统数据分析工具使用基于验证的方法,即用户首先对特定的数据关系作出假设,然后使用分析 工具去确认或否定这些假设。这种方法的有效性受到许多因素的限制,如提出的问题和预先 假设是否合适等。与分析工具相反,知识发现使用基于发现的方法,运用核式匹配和其他算法 冷定数据之间的需要联系。

2.知识发现的处理过程及系统结构

知识发现是一个复杂的处理过程,其中涉及多个处理步骤。Usama Fayyad 等人定义了一个知识发现处理模型,如图 7-21 所示,一般情况下包括以下几个处理步骤。

(1)了解应用的领域

了解知识发现相关领域的有关情况,熟悉有关的背景知识,并明确用户需求。

- (2)抽取目标数据集
- 选择值得关注的数据集或子集。
- (3)数据的清理与预处理

数据的清理与预处理包括一些基本的操作,如清除噪声及处理空值。来自现实世界的数 指由于各种原因,通常无法保证数据的完整性和一恐性,因此在数据控期前需要对数据进行清 理.

- (4)数据合并
 - 数据合并包括合并不同类型、不同来源的数据源。
 - (5)数据缩减

根据知识发现的任务目标,寻找有用的特性来表示经过预处理的数据,对数据进行降维、 铈化藻典外理,通过将影或教程底中的其依据作业少数据量及需要考虑的变量的个数。

- (6)确定数据挖掘的功能
- 明确由数据挖掘算法产生的模型的目的(如归纳、分类、回归、聚类、关联规则,或它们的组合)。
 - (7)选择数据挖掘的算法
 - 选择发现数据中模式的方法,包括选取合适的模型和参数。
 - (8)数据挖掘
 - 利用选定的数据挖掘算法,从数据中提取出用户感兴趣的知识。
 - (9)解释和评价
 - 对发现的模式进行解释。剔除冗余、无关的知识,对发现的知识进行检验评价,将这些知识

转变为用户可以理解的形式。

(10)使用发展的知识

将知识合并成可操作的系统,并基于这些知识妥取相应的措施。

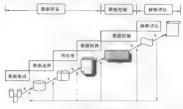


图 7-21 知识发现处理模型

3.知识发现的任务

-般地,把知识表示成规则形式。按照知识发现技术所能够发现的规则,将常见的知识发 现任务分为以下几种类型。

(1)特征规则发现

特征规则是 个断言,它把所有数据满足的概念特征化 特征规则发现能够总结并发现 由用户指定的数据集的 般特征,加特定疾病的症状等。

(2)辨识规则发现

辨识规则是把一个物据集(目标类)与另一个物据集(对比类)区分开来的特性或性质。例 如,为了把一种疾病与另一种疾病区分开来,辨识规则总结区分这些疾病的症状

(3) 互联(关联)规则发现

 $A_{-} \rightarrow B_{1} \wedge B_{2} \cdots B_{n}$ 的规则

(4)分类规则发现

把被分类数据映射到一组已知的类。

(5)數据豪华

根据对象属性标识对象集的聚类(类或组) 对象按某种聚类准则聚类后,对象组内的相 异性最小,组间的相异性最大。

(6) 预测

预测某些被丢失数据的可能值或数据很中某些属性值的分布。

(7) 的热性规则发现

发现反映数据集中普遍行为的规则集,

当然,上述其种规则仅仅是目前已知的规则知识中的一部分,尚有其他一些规则这里未列 出,例如量化规则等。

4. 知识发现结果的分类

知识发现的结果最常见的有以下几类。

(1)广义知识(Generalization)

它指类别特征的概括性描述知识。根据敷据的微观特性发现其表征的、带有普遍性的、较高层次概念的、中观和宏观的知识,反映同类事物的共同性质,是对敷据的概括、精炼和抽象。

(2) 关联知识(Association)

它反映一个事件和其他事件之间依赖或关联的知识。如果両項或多項属性之同存在关 联,那么其中一项的属性值就可以依据其他属性值进行预测。最为著名的关联规则发现方法 最 R. Agrawal 提出的 Anzion 算法。

(3)分类知识(Classification&Clustering)

它反映同类事物共同性质的特征型知识和不同事物之间的差异型特征知识。最为典型的 分类方法是基于决策树的分类方法。

数据分类还有统计、粗糙集(RoughSet)等方法。为降低决策树生成代价,人们还提出了一种区间分类器。最近也有人研究使用神经网络方法在数据库中进行分类和规则提取。

(4) 预测型知识(Prediction)

它根据时间序列型数据。由历史的和当前的数据去推测未来的数据,也可以认为是以时间 为关键属性的关联知识。目前。时间平列徐测方法有经典的统计方法、神经网络和机器学习 等。1968年 Bax 和 Jenkins 提出了一字比较完善的时间序列建模理论和分析方法,这些经典的 数学方法通过建立随机模型,如自回归模型。自回归精动平均模型、求和自回归精动平均模型 和季节调整模型等。并行时间序列的预测。

(5)偏差型知识(Deviation)

它是对差异和胺抛特的价相述,揭示事物编集者规约异常观象,如标准类外的特例,数据 集类外的离群值等。所有这些知识都可以在不同的概念层改上被发现,并随着概念层次的提 升.从微级型中观,到宏观,以编度不同用户不同是改集的需要。

5 知识发现的营用技术

知识发现是人工智能与数据库技术相结合的产物,人们在统计学、集合论、逻辑学、信息 论、认知论、人工智能等学科理论的基础上、提出了各种各样的知识发现的方法和技术、并且形 成了各自的特点和应用领域。对于不同的系统知识发现需要采用不同的技术方法和手段、大 教可自由物 5下列几种举罚。

(1)基下传统教理统计等教学工具的方法

应用數学 L具或专业知识进行相关分析、回归分析及因子分析等。如在应用系统中对模 型的分析从简单的趋向分析发展为基于高深敷学的分形理论等。

(2)人 L神经网络(ANN)

神经元网络(NN)技术是属于软计算(soft computing)領域内的一种重要方法。在 DM (KDD)的应用方面;消费吸及杂或不精确要据中导出概念和确定趋向比较困难时,利用 NN 技术特别有效。经过训练后的 NN 可以被想像成具有某种专门知识的"专家",因此可以像人一样从经验中学习。 其缺点是 NN 的知识获取过程是一个"黑棺"系统,受训后的 NN 所代表的预测模型不具有透明性。

(3) 本管献(decisiontree)

在知识 L 監領域, 決策網是一种常用的知识表示方法, 它将事侧逐步划分成不同的类别。 由于分类规则比较直观, 因面较易于理解, 在机器获取领域内已研制出许多实施决策树的有效 策法, 血 m 20 及其改许需任等。

(4) 讲化计算(evolutionary computation, 编写为 EC)

进化计算是條仿生物进化的一类计算方法的统称。包括遗传算法(GA)、遗传编聚(CP)、进 化策略(ES)、进化规划(EP)。它们大多其有以下特点、进化计算是在适应度离散的束下的智 能化搜索,在持端路效(适应度:函数)驱动下"优胜劣改"。通过多次迭代、逐步逼近目标。由于 进化计算一般都采用了交叉、变异等操作、扩大了搜索范围、因此能逼近全局最优解。且其具 有框架式的算法结构、一般只要完成编码和适应度函数选择,其余的遗传、交叉、变异等操作都 可以自动完成。

(5)基于事例的推理方法(case based reasoning,编写为 CBR)

该方法的思路非常简单,与预测未来情况成进方正确决策时,系统寻找与现有情况相类似 的事例,并选择最佳的相同的解决方案。这种方法能用于很多问题求解,并获得好的结果,其 能点是系统不能生成汇总还去松整的模块或规则,即无继承性。

(6)粗糙集理论(rough set theory)

粗糖集作为集合论的扩展,用于研究不完全和不完整信息描述的智能系统。对粗糖集的 研究主要基于分类,它对不精确概念的描述是通过上近似和下近似这两个精确概念来表示的。 粗能集理论可以解决的选本问题有:根据属性值描述对素集;分析属性同(全部或部分的)相关 性、属性归纳、确定属性重要性、决策规则生成等等。

7.4.2 知识发现在海洋监测数据中的应用

将上述决策树算法应用于海洋监测数据之中,以从中发现有参考价值的规则。其规则的 表述形式如下:

 $(((x, b_t), \operatorname{bard}(x, b_u), \operatorname{and·-and}(x, b_u))$ then $((y, b_u), \operatorname{and}(y, b_u), \operatorname{and·-and}(y, b_u))$ 其中 $_x, (y, fyh)$ 始ん、抽出的属性 $((x, i \in n, 1 \in j \in m); \omega_y, v_t, fyh)$ 为关系操作符 $(x, i \in n, 1 \in j \in m); \omega_y, v_t, fyh)$ カラス系操作符 $(x, i \in n, 1 \in j \in m); \omega_y, v_t, f_t \in m)$

定义规则的置信度与支持度如下。

仍取表 7-1 中的敷据。由于第 6 章的研究工作在于通过对总的浮游植物密度的预测来对 赤潮的发生进行预测预警,因此浮游植物的密度运作为研究的对象。而知识发现虽然也能作 预测,但其在赤潮研究中的主要任务在于发现特定薄美的生长规律,从喜类的敷置增减与各理 化因子之间的关系中发规知识,并以此为基础建立相应海域、相应高类生长规律的知识库,所 以应以表 7-1 中夜光纖的密度作为研究对象。

对夜光藻的密度暂以 10° 个/m² 为分界点,将其密度分为较高和较低两部分,数据分为训练数据集(前 14 组)与检验数据集(后 3 组)。应用决策树算法对上述监测数据进行计算,得到

表 7-22 中结里。

套 7-22 决等制算法所发现的提到

	If	Then	置信度	支持度
1	T < 23	夜光摄密度 < 10* 个/m³	100%	21.4%
2	T ⇒ 23. N < 0.42	夜光藤密度 < 10* 个/㎡	100%	42.9%
3	$T \ge 23, N \ge 0.42$	夜光藤密度 > 10 ^t 个/m ²	100%	35.7%

如表 7-22 所示,将上述提取出的规则对检验数据进行检验,其分类正确率达到 100%。

从结果中可以看出,夜光藤受温度及氮的浓度影响很大,而与其他几个参数基本没有关 赛。夜光濂的密度与氮的浓度关联很大,这与目前的结论是吻合的,但并不能认为夜光濂的密 度与其他因素都没有关系或关系不大。通过观察不难看出,样本数据中盐度的变化不大,始终 在30左右,所以无法退址它对夜光濂密度的变化趋势的影响。同样,癖的浓度及海水中的溶 懈瓴也满足了夜光澌生长的基本需要。这说明在本次采样的条件下,温度和氦成为影响夜光 濂生长趋势的关键因案。由此可以看出,不同降域,甚至不同季节所采集的数据对结果的影响 都很大。包括夜光濂密度的警戒值的确定也是随不同海域,不同时间而改变的,这里只是粗略 地选择一个假进行计算。

另外數据的选择对计算的结果影响很大,本次计算的样本數据在时间上相对较为集中,而 且數据量小,因此,归纳的知识从表面上看起来比较简单,但是结果还是很推确地描述夜光篇 來度知允盎較同的关系。

由于受呆棒数据的影响。本节只是计算了夜光器的密度与各影响因素间的关系。此外、还可以对数据作相应的预处理、计算夜光藻密度的变化患与各参数的变化的关系。即夜光藻密度 增加时,各相反的参数是如何变化的。这样可以通过两量各参数的变化,计算出票类的密度,由此了解藻类的生长特性。同样,如果能够得到非需发生临后的监测数据,则也能够得到藻类在赤潮发生时的相关知识,根据赤潮发生前薄类的生长特点以及对环境因素的监测结果,作出和应强润蓄等,并而误聚。它的预防和沿距增振

随着渤海各海域监测体系的逐步完善,所限聚构数据也会更加充分和完备,从所积累的数 则用中排出相应的知识,建立各海域廉类生长规律的知识库,以开产非测发生,发展规律的认识 以及未續確測職事系统的研究与维查,非犯着至关重要的作用。

(8-1)

第8章 赤潮发生频率的极值分析

近年来,赤潮在世界花图内频繁发生,造成了巨大的经济损失。目前,大部分文献是关于 赤潮发生机理的研究,为了能比较全面地认识赤潮发生的转点,提高赤潮预报的准确性,本章 试图用极值理论的方法对赤潮发生的频率进行分析,即求出一个 下次電現水平 $U_{(7)}$ 。 T 是使 得赤潮生物细胞浓度超过这一水平所需发生赤潮的次数,亦即经过 T 次赤潮才有一次超过这 一水平。

8.1 极值理论

近些年来,极值理论有了迅速发展,在很多学科领域内引起了高度重视,并得到了广泛的 应用。如在可靠性工程领域及人寿保险中,用来计算产品及人员的寿命;在环境监测中,用来 估计降两量、决降资量等;在全融领域中,用来作风险分析。一般来说,极值的精确 分布难以估计,主要研究的是其衡近分布。研究极值分布的理论称为极值理论(Extreme Value Theory,简称EVT)。

8.1.1 极值的定义和表达式

1. 次序统计量与极值分布

设 $X_i(i=1,\cdots,n)$ 是取自分布函数为 $F_x(x)$ 的总体的一个样本,将其按大小排序 $X_{(i)} \leqslant \cdots \leqslant X_{(i)} \leqslant \cdots \leqslant X_{(i)}$ 则称 $X_{(i)} \leqslant X_{(i)} \leqslant \cdots \leqslant X_{(i)}$ 为次序统计量、 $X_{(i)} = \min(X_1,\cdots,X_r)$ 、 $X_{(i)} = \max(X_1,\cdots,X_r)$ 分别称为样本极值分布称为极值分布。由极值构成的样本数据具有独立同分布的特点。

设 $F_*(x)$ 为总体的分布函数, $F_*(x)$ 为极小值分布函数, $F_*(x)$ 为极大值分布函数, 则总体分布与它们之间有如下关系.

$$F_1(x) = P(X_{(1)} \le x) = 1 - P(X_{(1)} > x)$$

$$=1-P(X_1>x,X_2>x,\dots,X_n>x)=1-[1-F_T(x)]^n$$

$$F_{-}(x) = P(X_{t-1} \le x) = P(X_{t} \le x, X_{t} \le x, \dots, X_{t} \le x) = F_{x}^{*}(x)$$
 (8-2)

由以上两式,可以从总体分布得到极值分布。但大多数情况下,总体分布是未知的,这就需要 运用新沂理论的方法,人们常用的是 n→∞时所得到的极值新近分布。

2. 标准极值分布的三种形式

下面的问题是当 $n \sim \infty$ 时, 样本极大值 $X_{(n)}$ 分布的可能分布类型是什么。也就是说, 能不能找到一个通用的表达式 C 来表示这些可能的极值分布, 并且要求 G 与 F 无关。如果这样, 就可以直接用分布族 G 来估计分布, 而根本不用考虑 F。

1943 年,统计学家 Gnedenko 证明了以下的极值分布。

定理 8.1 极值类型定理 如果存在常數序列 $a_n > 0$ 和 b_n ,使得对于某一非退化分布 G,当 $n \to \infty$ 时

$$P\left\{\frac{X_{(n)} - b_n}{a_n} \leqslant x\right\} \rightarrow G(x)$$
 (8-3)

则 G 是下列三种类型的分布函数之一。

I :
$$G(x) = \exp(-x) | (-\infty < x < +\infty)$$

II : $G(x) = \begin{cases} \exp(-x^{-x}) & (x > 0, \alpha > 0) \\ 0 & (x \le 0) \end{cases}$
II : $G(x) = \begin{cases} 1 & (x \ge 0) \\ \exp[-(-x)^{-x}] & (x < 0, \alpha < 0) \end{cases}$
(8-4)

综合起来,定理 8.1 中的分布胰分别称为 I、II、II型极大(值)分布,也称为 Gumbel、Frêchet、 Weibull 分析,类似可得到极小值分布。

3.广义极值分布

鉴于统计目的,应用以上3个极值分布族并不方便。3个分布族经过适当变换后,这3种类型的分布可用一种分布——广义极值分布表示;

$$G(x) = \exp \left\{-\left[1 + \frac{e}{2}\left(\frac{x-\mu}{2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}\right\} \qquad (8-5)$$

式中,定义域为 $\left\{x \mid 1 \mid \frac{\varepsilon(x-\mu)}{\sigma} > 0\right\}$ 。极限分布 \mathbb{I} 型和 \mathbb{I} 型分别对应了 $\varepsilon > 0$ 和 $\varepsilon < 0$ 的情况,类型 \mathbb{I} 则是 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时的极限。参数 ε 称为形状参数, μ 称为位置参数, $\sigma(\sigma > 0)$ 称为尺度参数。

变换式(8.5)可以得到最大值的极限分价数

$$x_p = \mu - \frac{\sigma}{6} \{1 - [-\log(1-p)]^{-\ell}\}$$
 (8-6)

易得, $G(x_p) = 1 - p$ 。 在极值术语中, x_p 称为重现期 1/p 的重现水平。通常用式(8-6)预测得 制活干權羽但報出數模范期的實理水平的估计。

8.1.2 极值阈值方法

设 $X, (i=1,\cdots,n)$ 是独立同分布的随机变量,它们的共同分布为 F(z),如前面所讨论, $\hat{X}, (i=1,\cdots,n)$ 的股大 厄服从厂 汉极 值分布 G(z)。本节考虑这样 一个问题, 选取一个比较大的 編價 u。对于超出这一阈值的影影 v X 不信服 股州 全转的分布? 阈值 又设施的运题?

1.超網信分布

设 X_i $(i=1,\cdots,n)$ 是独立同分布的随机变量,它们的共同分布为 F(x),选取一个阈值 u, 使得 u,小干F 的支撑都的右端点。即

 $u < \omega(F) = \sup |x| F(x) < 1$

记 X 为任意的 X_i , $i=1,\dots,n$, 考虑下面的分布:

$$F^{(x)}(x) = P(X \le x | X > u)$$

 $= P(X \le x, X > u | / P | X > u |$
 $= \frac{F(x) - F(u)}{1 - F(x)} \quad (x \ge u)$ (8-7)

称 F^[u] 为超阈值分布。如果总体分布 F 是已知的,则形如式(8-7)的超阈值分布也可以求出

(8-10)

来,但在实际应用中,总体分布往往是未知的。 如 8.1.1 节中的讨论,需要求出它的新近分布。 定理 8.2 设 X_i ($i=1,\cdots,n$) 是独立同分布的随机变量,它们的共同分布为 F(z),令

 $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ 若 M_n 新沂服从广义极值分布、即

 $P|M \ll z| \propto G(z)$

則超阈值分布(| X, | X, ≥ u | 的分布)为

$$H(y) = 1 + \log \tilde{G}(y) = 1 - \left\{1 + \xi \frac{(y - u)/\sigma}{1 + \tilde{\xi}[(u - \mu)/\sigma]}\right\}^{-\frac{1}{\xi}}$$

$$= 1 - \left[1 + \xi \left(\frac{y - u}{u}\right)\right]^{-\frac{1}{\gamma}}$$
(8-8)

定义域为 $\{y|1+\frac{\xi(y-u)}{a}>0\}$,其中,G(z)形如式(8-5)

$$\widetilde{G}(\gamma) = \exp \left\{ -\left[1 + \xi \left(\frac{\gamma - u}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}}\right\}$$
(8-9)

$$\hat{\sigma} = \sigma + \xi(u - \mu)$$

证明:由于

 $P\mid M_{x}\leqslant z\mid =F^{a}\left(z\right)$

可知

$$F^*(s) \approx \exp \left\{ -\left[1 + \xi \left(\frac{s - \mu}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}}\right\}$$
 (8-11)

式(8-11)两边取对数,则有

$$n \log F(z) \approx -\left[1 + \xi \left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}}$$
(8-12)

对于比较大的 z,由泰勒展开式可知

$$\log F(z) \approx -[1 - F(z)]$$
 (8-13)

于是就有

$$1 - F(u) \approx \frac{1}{n} \left[1 + \xi \left(\frac{u - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}}$$
(8-14)

$$F(\gamma) - F(u) \approx \frac{1}{n} \left[1 + \xi \left(\frac{u - \mu}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{n} \left[1 + \xi \left(\frac{\gamma - \mu}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$$
(8-15)

所以

$$P(X \leq y \mid X > u) = \frac{F(y) - F(u)}{1 - F(u)}$$

$$-1 - \left[1 + \xi \left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}} \left[1 + \xi \left(\frac{u - \mu}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}}$$

$$= 1 - \left\{1 + \xi \frac{\left(y - u\right)/\sigma}{1 + \xi \left(\left(u - \mu\right)/\sigma\right)}\right\}^{-\frac{1}{\xi}}$$

$$= 1 - \left[1 + \xi \left(\frac{y - u}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}}$$
(8-16)

汶里

$$a = a + \delta(u - u)$$

在定理 8.1 的条件下,还可以推导出超阈量 $\{X_i - u \mid X_i > u \mid 0$ 的分布

$$P(X - u \leq y \mid X > u) = \frac{F(y + u) - F(u)}{1 - F(u)} = 1 - \left[1 + \xi\left(\frac{y}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}}$$
 (8-17)

2. 广义 Pareto 分布

超阈值{X,|X,> u\和超阈量|X, - u|X,> u\所服从的分布称为广义 Pareto 分布。由式 (8-4)和定理 8.2 可以得到三种类型的广义 Pareto 分布。

指数分布:

$$W_0(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-x) & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

Paneto 分布。

$$W_1(x) = \begin{cases} 1 - x^{-\alpha} & (x > 1, \alpha > 0) \\ 0 & (x < 1) \end{cases}$$

Beta 分布:

$$W(x) =\begin{cases} 1 & (x \ge 0) \\ 1 - (-x)^{-x} & (-1 < x < 0, a < 0) \end{cases}$$
(8-18)

把广义 Pareto 分布族统一地表示为

$$W_0(x) = 1 - \exp(-x)$$
 $(x > 0)$
 $W_{\gamma}(x) = 1 - (1 + \gamma x)^{-1/\gamma}$ $(0 < x, \gamma > 0; 0 < x < 1/1 \gamma 1, \gamma < 0)$
(8-19)

把位置参数 μ 和尺度参数σ代人式(8-19)可得

$$W_0(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$
 $(x > \mu)$

$$W_{\tau, \mu, \epsilon}(x) = 1 - \left[1 + \gamma\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)\right]^{-1/\tau} (\mu < x, \gamma > 0; \mu < x < \mu + \sigma/1\gamma \mid, \gamma < 0)$$
(8-20)

由式(8-20)可得 Pareto 分布的密度

$$w_0(x) = \frac{1}{\sigma} \exp \left\{ -\frac{x-\mu}{\sigma} \right\} \quad (x > \mu)$$

$$w_{\nu,\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma} \left\{ 1 + \gamma \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \right\} \quad (\mu \leqslant x, \gamma > 0; \mu \leqslant x < \mu + \sigma/|\gamma|, \gamma < 0) \right\} \quad (8.21)$$

以上讨论了超阈值和超阈量的分布,其中阈值的选取是有一定规则的。

8.1.3 7次重现水平

在用极值理论对赤潮的发生作频率分析的时候, ₹次重现水平是一个非常重要的概念,本 节给出详细的介绍。

T次重现水平就是一个阈值 $U_{(T)}$,满足在 T 次观测中有一次观测值超过这一阈值。每次

赤潮发生只有一个观测值,即赤潮发生期间赤潮生物的细胞浓度的最大值,就是说经过 T 次 赤潮才有一次超过阈值 U.n.o. 下面给出 T 水 電視水平的永法。

设 X_1, X_2, X_3, \cdots 为独立同分布的随机变量、分布为 F , 令 u 为事先确定的比较大的阈值 (u 小下分布 F 的右鎖点)、记

 $\tau_i = \min \{ m \mid X_m > \mu \}$

r, 为第一次超过阈值 u 的时间(称为第一次超过时间)。类似地,第 r 次超过阈值 u 的时间

$$\tau_{-} = \min\{m > \tau_{-}, |X_{-} > u\} \quad (r > 1)$$

总较有

 $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \cdots$

把 +. 滑成一随机变量,可以求出它的分布函数

$$P\{\tau_1 = k \mid = P \mid X_1 \leq u, \dots, X_{k-1} \leq u, X_k > u \mid = p(1-p)^{k-1} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$
(8-22)

其中

$$p = 1 - F(u)$$

由式(8-22)可知,第一次超过时间服从参数为 p 的几何分布。它的均值

$$E(\tau_1) = \sum_{k=1}^{n} kp(1-p)^{k-1}$$

= $p[1 + 2(1-p) + 3(1-p)^2 + 4(1-p)^3 + \cdots]$
= $\frac{1}{p}$

令这一均值等于 T,可以得出 T 次重现水平 $U_{(T)}$,即 $U_{(T)}$ 是方程

$$E(\tau_1) = \frac{1}{1 - F(u)} = T$$
 (8-23)

的解。由方程(8-23)解得

$$U_{(T)} = F^{-1}(1 - 1/T)$$
 (8-24)

这里,分布 F 的确定将在下一节中讨论。

8.2 赤潮发生的颗率分析

上一节介绍了极值理论的一些基本概念,本节在随机敷模拟的基础上给出观测值所服从 的分布函敷的确定,并求出 T 次重现水平。

8.2.1 数据采集

针对亦溯发生时能响面积大,持條时间短的特点,在亦溯观测中,往往要在亦溯发生的水 诚设很多的观测站,并在一天中作多次(早、中、晚)观测,记录下观测数据进行分析。本节所要 考虑的是某一水城间。观测站会次亦溯的观测数据。

由于要用到大量的数据。这里用止态分布的颠眙数米代替希腊的实际观测数据。假定赤 期生物的细胞浓度的观测值服从均值为 2、方差为 1 的正态分布,产生 100 次这样的随机敷作 为 100 次赤酮的观测数据。每次产生 21 个随机敷、表示每次赤侧发生期间、同一观测站在一星 期内测得的 21 个观测数据(每天 3 个数据)。从每次的 21 个数据中取最大值,就得到了由极 大值构成的 - 组数据(x, x, -, -, x, -, -)。下面定议组数据所服从的分布函数。

8.2.2 密度函数的估计

记 X 为任意的x_i, i = 1,2,···,100,由 8.1 节知道, X 服从广义极值分布,即 X ~ G(x:θ)

其中, $\theta = (\mu, \sigma, \varepsilon)$ 为未知的参数,需要由极大似然估计得出。由于 $\varepsilon = 0$ 和 $\varepsilon \neq 0$ 分别对应 $G(\theta)$ 的不同表达形式,因此要有一个标准用来选择合适的分布模型。

在作根大似然估计之前。可以作出观测值所服从的分布密度的一个估计,通常有两种方 法。构造逻辑分布密度函数。构造核密度函数(kernel density)。构造出的函数作为观测值的真 实分布密度。然后由极大似然估计作组合,从而得出适合的分布。下面给出详细的讨论。

1.经验密度函数

把 z, z, ..., z,作为 X 的一个样本, 可以得到 X 的经验分布函数

$$\hat{F}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i} I \quad (x_i \le x)$$
 (8-25)

式中:n=100,I 为示性函数。f(x)是离散的函数,对它在 $(t_i,t_{i+1}]$ 上作线性插值可得

$$F(x) = \hat{F}(t_j) + \frac{b_x - t_j}{t_{j+1} - t_j} [\hat{F}(t_{j+1}) - \hat{F}(t_j)]$$

$$= \hat{F}(t_j) + \frac{(x - t_j)n_j}{t_{-1} - t_-} (t_j < x \le t_{j+1})$$
(8-26)

式中,n, 为观测值 z_1,z_2,\cdots,z_m 落人区间 $(z_1,z_{n+1}]$ 的频率。

由式(8-26)构造的 X 的分布函数 F(x)是连续的,对它关于 x 求导即得 X 的密度函数

$$\hat{f}(x) = \frac{n_j}{t_{i+1} - t_i}$$
 $(t_j < x \le t_{j+1})$ (8-27)

记 n(j)为观测值 z_1, z_2, \dots, z_{100} 落人区间 $(i_j, i_{j+1}]$ 的个数,则式(8-27)可改写为

$$\hat{f}(x) = \frac{n(j)}{n(t_{i+1} - t_i)} \quad (t_j < x \le t_{j+1})$$
(8-28)

这是由样本 x₁, x₂, ····, x_m确定的糖度函数,把它作为样本的经验分布密度,可以很好地反映 出观测值所服从的分布,但是有一个缺点,就是在构造这个函数的时候,必须完确定区间(s, y_n)的划分。为解决这个问题,可以作一个均匀的划分,得到直方图作为样本的经验分布密 度。但直方图是不连续的,下面给出另外一种构造光精密度函数的方法,即构造影响函数核密 度(kemel density),以下商条为核密度函数。

2.核密度函数

假定有

$$g(x, x_i) = \frac{1}{n(t_{j+1} - t_j)} \quad (t_j < x \le t_{j+1})$$
(8-29)

式(8-29)表示点 z_i 落入区间(z_i, z_{i+1}]。于是就有

$$\hat{f}(x) = \sum_{i} g(x, x_i) \quad (t_i < x \le t_{j+1})$$
 (8-30)

显然, $g(x,x_i)$ 是定义在区间 $(t_i,t_{i+1}]$ 上的常函數。令 b>0 为步长,构造不依赖区间 $(t_i,t_{i+1}]$

的函数

$$g_k(x, x_i) = \frac{1}{nb}k\left(\frac{x - x_i}{b}\right)$$
 (8-31)

式中: k(+)为一个核哺教(kernel function), 端足

$$\int k(y)dy = 1$$

如果 $k(\cdot) \ge 0$,则 $k[(x-x_i)/b]/b$ 可以看成具有位置参数 x_i 和尺度参数 b>0 的密度函数。由式(8-30)和式(8-31)可得

$$\hat{f}_{k}(x) = \sum_{i} g_{k}(x, x_{i}) = \frac{1}{nh} \sum_{i} k \left(\frac{x - x_{i}}{b} \right)$$
(8-32)

如果 $k(\cdot) \ge 0$,则 $f_i(z) \ne X$ 的核管度函数。其中,核函数 $k(\cdot)$ 可以有不同的表示形式,如表 8-1 所示、取不同的核函数 $k(\cdot)$,对得出的核密度函数影响不大。

但是式(8-32)中的步长。的取值会影响到核密度函数的性质。如果。取较小的值、即 $g_1(x,x_i)$ 有较小的尺度参数。它能反映出每一数据所包含的信息,这时核密度函数 $f_1(x)$ 的图像是不光滑的折线,相反、若。取较大的值,核密度函数 $f_1(x)$ 的图像是光滑的曲线,此时会丢失数据所包含的一些信息,参见图 8-1。图 8-1 是数据 (x_1,x_2,\cdots,x_m) 所对应的核密度函数 $f_1(x)$ 的图像。

下面给出求先长 5 的方法,今

$$MSE(\hat{f}_{h}) = E[\hat{f}_{h}(x) - f(x)]^{2}$$
(8-33)

$$ISE(\hat{f}_{b}) = [\hat{f}_{b}(x) - f(x)]^{2}dx$$
 (8-34)

式中,假定 f(x)为样本所服从的真实分布密度,它是未知的。

	表 8-1 核函數 &(+)			
核函數	k(·)			
Uniform	$\frac{1}{2}I(iui \leqslant 1)$			
Triangle	(1-iu) I(1u1≤1)			
Epanechnikov	$\frac{3}{4}(1-u^2)f(1u1 \le 1)$			
Quaritic	$\frac{15}{16}(1-u^2)^2 I(tu t \le 1)$			
Tri-vight	$\frac{35}{32}(1-n^2)^3 I(1 + 1 \leqslant 1)$			
Gamin	$\frac{1}{\sqrt{2\kappa}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right)$			
Cosimus	$\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)I(n \leqslant 1)$			

式(8-33)称为均方误差,式(8-34)称为平方积分误差(integrated squared error)。对式(8-34)求均值可得

$$MISE(\hat{f}_b) = E\left\{\int [\hat{f}_b(x) - f(x)]^2 dx\right\}$$

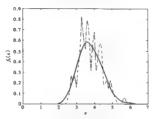


图 8-1 核密度函数图 b=0.5940(实统),b=0.1120(建统)

$$= \int |E[\hat{f}_b(x) - f(x)]^2 dx$$

$$= \int MSE[\hat{f}_b(x)] dx = IMSE(\hat{f}_b)$$
(8-35)

式(8-35)是关于步长 b 的函数,在 $min MISE(\hat{f}_a)$ 的条件下,可以得出步长 b 的估计值。但是由 于式(8-35)比较复杂,需要作近似的简化。下面给出一个定理。

定理 8.3 若 k(x) 满足下面的条件: ①k(x)定义在[-1.1]上,并且是对称的;

② $\int k(z)dz = 1$, 即 k(z)是一个密度函数;

 $\Im \int x k(x) dx = 0;$

$$\widehat{\oplus} \int x^2 k(x) \mathrm{d}x = \sigma_k^2 > 0_0$$

则当 6→0, nb→∞时

$$MISE(\hat{f}_b) \approx \frac{1}{4} \sigma_b^4 b^4 \left[[f''(x)]^2 dx + \frac{1}{nb} \right] [k(x)]^2 dx$$
 (8-36)

由定理 8.3. 式(8-35)简化为式(8-36)。今

 $\hat{b} = \arg \min MISE(\hat{f}_b)$

可得

$$b = \frac{\int [h(x)]^2 dx}{\sigma_4^4 [[f'(x)]^2 dx} \int_0^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{2}}$$
(8-37)

式中、f(x)是未知的、可以用直方图来代替、取

$$k(x) = \frac{3}{4}(1-x^2)I \quad (-1 \le x \le 1)$$
 (8-38)

它是 Epanechnikov 核函數, 满足核函數的性质。由式(8-37)可得 δ = 0.594 0, 相应的核密度函数如图 8-1 所示。

不同的核函数 k_1 和 k_2 对应的步长 b_1 和 b_2 的取值也不同。它们之间有下面的转换关系 $b_1 = \delta_1 b_1 / \delta_1$ (8-39)

式中, $\delta_i(i=1,2)$ 为核函数 $k_i(z)$ 对应的尺度参数。不同的核函数对应的尺度参数如表 8-2 所示。

表 8-2 不同核函数对应的尺度争缴			
核函數	8		
Uniform	$\left(\frac{9}{2}\right)^{1/3} \approx 1.3510$		
Epanechnikov	15 ^{1/3} ≈1.7(8 8		
Quaritic	35 ^{1/3} ≈ 2.036 2		
Carrie	(1) 1/10 = 0.776 4		

8-2 不明結兩數对应的尺度參數

8.2.3 参数估计

仅从图 8-1 无法看出观测值所服从的具体分布,下面采用参数估计的方法求出这一分布。 1. 极大假整估计

由 8.1.1 节已经知道,X 服从广义极值分布 $C(x;\theta)$,其中 $\theta = (\mu,\sigma,\xi)$ 。 若 $\xi = 0$,X 服从 Gundel 分布;若 $\xi \neq 0$,X 服从 Fréchet $(\xi > 0)$ 和 Weibull $(\xi < 0)$ 分布,相应的对数似然函数分别为

$$l(\theta) = -n \log \sigma - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) - \sum_{i=1}^{n} \exp \left[-\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right]$$
 (8-40)

$$l(\theta) = -n\log \sigma - (1 + 1/\xi) \sum_{i=1}^{n} \log \left[1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right] - \sum_{i=1}^{n} \left[1 + \xi \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right]^{-1/\xi}$$
(8-41)

假定 ε=0,由式(8-40)可得 θ 的級大似然估计者。= (3.475 275 8.0.547 076 1):假定 ε≠0,由式 (8-41) 可得 δ, = (3.524 773 0,0.567 698 8, = 0.166 051 6)。 即若 ε=0, X 限从参数方章, 的 Gumbel 分布: 若 ε≠0, X 限从参数方章, 的 Weiball 分布。下面需要从这两种分布中选出最适合的分布。

2.模型检验

概率图(PP图)、分位數图(QQ)图、重現水平图、密度图(直方图)可以用来评估模型(广义 极值模型)拟合的好坏。 假定由极大似然估计得出的分布为 $\hat{G}(x)$,记样本的次序统计量为 $x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant x_{(a)}$,则概率图由下面的点组成

$$\left(\frac{i}{n+1}, \hat{G}(x_{(i)})\right) \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

分位数图由如下的点组成

$$\left[\hat{G}^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right),x_{(i)}\right] \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

如果样本服从广义极值分布、驯概率图和分位数图应该近似为直线。

由式(8-42)可知,重现水平图由点集|(T,Um)|组成,Um是T次观测重现水平。

$$U_{cm} = \hat{G}^{-1}(1 - 1/T)$$

通过上述分析,可以得出模型的诊断图、如图 8-2 所示。由图 8-2 可以直观地看出参数为 δ , 的 Weiball 分布能更好地拟合样本的分布,而用参数为 δ , 的 Gambel 分布作为拟合,其效果 率告一些。但是为了精确。应该有一个确定的逐渐地理。

以下给出一个选择参数的标准。假定 $X \sim G_0(x)$,密度函数为 g_0 ,定义 $d(\hat{f}_1, g_0)$ 如下:

$$d(\hat{f}_b, g_\theta) = \|\hat{f}_b - g_\theta\|_{L^2} = \{ \sum_i [\hat{f}_b(x) - g_\theta(x)]^2 \}^{1/2}$$
(8-44)

综合图 8-1, 令 $A = [0,0.1,0.2,0.3,\cdots,7]$ 。把 θ_1 、 $\hat{\theta}_2$ 分别代人式(8-44), 对应下较小的 $d(\hat{h}, a_1)$ 的 $G_0(x)$ 就景所要的分布、计算结果如表 8-3 所示。

表 8-3、 d(f_e, g_d)的计算结果

参数	$d(\hat{f}_b, g_0)$
θ_1	0.355 721
<i>θ</i> ₂	0.228 432

从表 8-3 选择 θ_1 对应的 Weibull 分布,即 X 服从参数为 θ_2 的 Weibull 分布。从图 8-3 也可以很盲观数看出这一结果。

这里需要说明的是,关于如何在 GEV 模型和 Cumbel 模型之间进行选择。一直是一个比较 有争议的问题。从直观上看,两种模型所估计的重观水平线相似,但 GEV 模型中置信区间更 G.一些,特别是当重观钢较长时,置信区间更宽。从减小不定性出发,如果 Cumbel 模型是可信的,应优先选择它,他问题是 Gumbel 模型是 or Tombel 模型是 Or 能态说明 但这不能说明其他模型就不可靠。 事实上,如果 GEV 模型的板大似然估计 C = 0 能否说明 Cumbel 模型是合适的,关于这个问题仍没有达成共识,但最好的做法是,不管 Cumbel 模型正确与系 那解检查形状会数的不定性并且依靠法是基于 GEV 模型所作的体质。

8.2.4 求 T 次重现水平

上一节得出了 X~Ga(z),由式(8-24)可得 T 次重现水平

$$U_{(T)} = G_0^{-1}(1 - 1/T)$$
 (8-45)

EU

$$U_{(T)} = \mu - \frac{\sigma}{\xi} \left[1 - \left[-\log(1 - 1/T)\right]\right]^{1-\xi}$$

= 3.524 773 0 + 3.418 809 6 $\left[1 - \left[-\log(1 - 1/T)\right]^{0.166.91.6}\right]$ (8-46)

把 T=10,30,50,80,100 分别代人式(8-46),得出相应的 T 次重现水平,如表 8-4 所示。

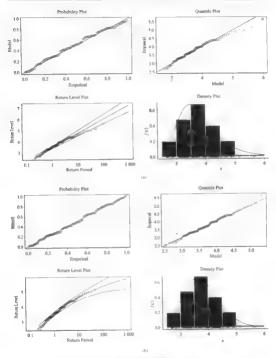


图 8-2 模型诊断性 (a)参数为 8, 的 Gumbel 分布的模型诊断图 (b) 5 数为 8, 的 Weshall 分布的模型诊断图 (b) 5 数为 8, 的 Weshall 分布的模型诊断图

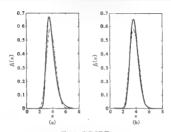


图 8-3 密度函数图。
(a)参数为 8₁ 的 Gambel 分布(实线)和 $\hat{f}_{0.990}(x)$ (建线)
(b)参数为 8₂ 的 Weibull 分布(实线)和 $\hat{f}_{0.990}(x)$ (建线)

表 8-4 7次重現水平

次数	10	30	50	80	100
$U_{(T)}$	4.590 8	4.994 6	5 155 I	5 290 4	5 350 9

对于 $U_{(20)}$ = 4.590 8,分别有第 5、13、20、23、46、51、53、58、66、86 次的观测值超过了这一水平;对于 100 次重现水平 $U_{(20)}$ = 5、350 9,只有第 13 次的观测值超过了这一水平,这说明第 13 次赤潮的规模是比较罕见的。

第9章 赤潮的预测预警系统与综合治理

9.1 未潮预测预警系统

9.1.1 赤潮预测预警方客建立的基础

亦溯預測預警系統的建立,與不开对赤潮高发区的良时、推确和全面的监测。在掌握了影响。 病源数生的全部因素的基础上,实时对相关海域进行监测,根据所得信息,判断赤潮发生的 可能及其危害程度,这对于赤湖的预测加贴自有重要的意义。

亦鄉是一种十分复杂的生态异常现象,其形成的原因是多方面的。有害赤潮(HABa)的监 獨內容包括采锌的时间和空间, 界定的采样尺、域和站位, 采样模率, 水质水文, 气象参数, 生物 样品的定性和定量分析, 错系浮标, 光照, 光瓷城, 波幅等诸多因素, 卫凰照片可以提供更多的 水阴冷和海运动情况及差层水中的毫类的生物量、颜色和色彩强度等)。

制定一个行之有效的监测计划对研究赤揃、积累数据、建立和完善相关数据库,及为预测 和预报提供快速和推编信息等作用很大。赤綱监测主要包括以下几个方面。

(1)海水森硝亚

监测计划对有客赤潮能够提供早期预警,确定特定种类的卷客反应及作用浓度,指导海水 养糖者描面做好的范准备,并充赤瓤后特缘监测,防止任何有害虚分的侵害。

(2) 生态系统损伤

监测计划对特定种类引发的有害赤潮可能对海洋生态系统造成的损伤接前作出预报、制 定出相应的政策和指施。以防止有害赤潮对生态系统的侵蚀。同样,在任何潜在的危害未完全 指失之前。要对有害赤潮进行徐续的监测。

(3)渔业

早期預报可以使监测结果的使用者了解赤欄发生的区域內有審藥类对贝类和鱼类的致糖 性(包括糖性的种类、高樂何贝类等),果取美闭某些海域的微弱,建议擒民另选作业区等情能, 或对贝类影响不大的赤磡发生区进行监测,防止杂藓贝类进人市场,并对人类造成危害。对有 富赤磡的监测要一直持续到其后隐性完全消失。

(4)富营养化和气候的变化

監測计划和損害預測系統的建立需將有害赤繩的发生作为全韓和地区性富营养化指标或 就們不(較变化指标。这就需要仔细塞定藥华中的生物(包括浓度水平、有害藥类的种类等) 以及需要长期, 穿点或定区減果集样品, 并对資料进行系统分析。

对现有有关赤襦文献的处理,包括使用现存的区域或地方性环境资料对特定的海域的基本情况,如生物,化学、物理状况(包括温度和气象变化等)进行初步了解。 首选资料包括潜在 有硅藻类的发生时间和空间分布情及影响后果的历史资料。其论包括水团的物理和化学特 在及其季节变化和年变化。重要参数包括温度、盐度、表层水的分层、表层环流(有害赤潮的藻类的迁移)、无机营养盐的东囊和时空分布等。再次、气象的变化资料也是监测资料的重要内

容,包括季节性降雨,风暴或者特殊的风易(如季风及其形成的洋流等)。除此之外,监测资料 还包括易受到有害活潮(HAB) 神由的当地生态系统组成,生态资源(如珊瑚礁,渔杨或者贝类 产地等),这种等材料的深度特计划和未漏的隔膜覆蓄系经良壮十分繁宏。

9.1.2 赤潮预测预警方案建立的总体思想

随着我国经济的迅猛发展和城镇化进程的加快,沿海地区工农业废水和生活污水排放量 不断增加,海洋环境污染产重,赤衢灾害呈现出发生换率增加,暴发规模扩大,原风种灾增多。 危害程度加重的发展趋势,已经成为沿海地区的主要海洋灾害之。赤潮灾害严重碳坏正常 的海洋生态系统,危害油业资源和海产养殖业,或胁人类健康和生命安全。因此,全面开展赤 潮预防控制治理工作,有效减轻赤潮灾寒壶或的损失,是一项十分重要有常泊的任务。

赤鄰領防控制計四工作是一項长期,复命約系統工程。为了能够较为快速,准确地对赤潮 的发生进行预测,预整,进而进行防治,把由赤鄰実育引起的损失減至最少,需要加强对赤潮常 发生海域的各方面的环境组累的实时监测和研究。在收集相关信息,并对其进行分析和整理 的基础上,逐步建立典型海域有害赤潮生态学和海洋学的文献率,数据年,建立数据率与家系统,并在实际的赤潮损圈,预警中对系统模型进行评价,不断修正和完善专家数据库系统,使其 比较科学地及史特定海域的状况。专家数据库系统主要包括以下几个方面。

(1)特定海域的赤潮藻类种属数据库的建立

首先要对该海域典型的赤潮藻类的种属进行识别、分类、并建立该海域的赤潮种属库。其次对赤潮的优势种属进行围隔实验、对其生态生理特征、生活史、藻类毒素等进行仓面的研究。

(2)有害赤潮(HAB)种群生态动力学

通过图隔试验、对赤潮藻类的生态动力学模型进行数值模拟和仿真研究具有很重要的意义。数值模拟对研究所起的作用是野外观测和实验室研究所不可代替的。野外观测结果是各种过程作用的综合效果,难以确定某一因子的作用。而实验室研究用能考虑单个或少数几个 因素造成的影响,很难进行综合实验。众所周知,数值模式可以通过参数控制进行数值实验,以便确定哪些因素在赤潮处土相发展的过程中起重要作用。数值方法废可以确定单个因素的

影响,又能对多因素的效果进行数值研究。数值模式具有可重复性,能节约大量资金,也可以 大大缩短赤潮的研究周期, 这不仅有利于赤潮成因与机理的理论研究,而且将企推动赤潮预 测,指指的不能发修。

无论是规则还是理论研究,其目的归根结底在于对赤潮发生进行预测,预警,减少赤潮灾 客造成的损失。从预测,预警角度上看,预报是采用较完善的性能良好的数值要,式埃实现,从 理论上来看,数值模式可以用野外观测和实验结果来检验,反过来又能进一步指导野外或实验 窗口作。

(3)特定海域水体动力学

海洋水体动力学也是影响赤潮形成和发生过程的重要因素。在近海海域,由于河流径流 把大量的污染物带,海域,造成局部海域的营养盐球度严重超标,即形成特定海域的富营养 化。潮汐和洋流的对流和扩散作用,能使局部海域的营养盐迅速扩散,使特定海域的营养盐功 便降低,从而避免蒸类的暴发繁殖。同时洋流的对流和扩散作用能使聚集某一特定海域的赤 潮藻类接冲散到其他海域或者更广阔的海域,使赤潮藻类的聚聚浓度较低。从而不能形成赤 潮。但是由于洋流对流的影响,也使沉落在海底的赤潮蓬类的孢子被带到水体的表层,特别是 在天气较好的情况下,被带到表层的孢子容易发芽、繁殖,如果其他环境因子满足其暴发繁殖 条件,数会引发赤潮。

对局部编域的客 年港流进行數值模拟,拿握不同海域每个季节的港流模型及其相关的影 明参数,不仅可以提供相关海域的物理状况。而且可以将其与藻类生长的生态动力学模型相结 合、確立施洋生态动力学经合模型,为赤端的管报,福警提供更为宗参约副沙德等极极。

(4)沿海排污引起的海域营养盐环境因子的变化

营养盐是亦潮藻类生长所必需要的物质基础。也是引起藻类攀发繁殖的重要环境因下。 水体的富营养化是引发赤潮的原因、由由于上农业污染物、生活污水等随径流入海、特别是海 水养殖所造成的污染、使局部海域形成了富营养化。尤其是河口附近的海域、营养盐的软度都 远远超过藻类生长所需称度。接种的弱、麝香养二素和赤潮生物的化学循环如图 9.1 所示。

一般认为, 氮和磷足海洋藻类生长繁殖所需的最重要营养元素。除氮和磷之外, 含硅、铁、 锰等元素的无机盐和维生素 B, 等有机物也是影响奏类生长、繁殖的营养因子。

为了了解特定海域的营养盆浓度变化、需要对该海域水体的物理、化学状况进行监测,并 了解和建立由经流带来污染物对营养盐浓度变化的污染模型。同时对关键性营养因子氮和磷 的循环进行跟踪研究,给合洋流和生态动力学模型,建立控制性环境因子的循环模型,从而对 赤纖汗行稱解和此幹。

(5)水文、气象等其他环境因子的变化

由于渤海的大部海域处于富吉养化状态,无机盐的浓度始终超过藻类生长所需的浓度,所以水文,气象条件是引发赤潮的导火索。水温气象条件主要包括温度,降雨、风速和风向等。 大量的插面降水导致,海的液火煮增加,使海水液化,洞时内陆河水所滑带的丰富的有机物质 及污染物也随之人海,使海水的富营养化程度加剧,这是赤潮形成的有利条件之一。在每年的 5月,8月和10月,渤海海域的气温较高,如果再遇到连续晴朗天气,日熙充足,风速较小、扩散 能力较差,赤潮寨类极易雾殖和聚集,从而形成赤潮。

加强海域的中、长期的天气预报工作,掌握特定海域的年变化和季节变化规律,有助于建立赤潮的预测、预警系统机制。

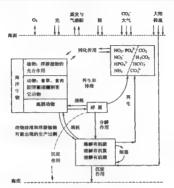


图 9-1 海洋中的 N.P营养元素和赤潮牛物的化学循环

(6)赤瀬卫星選艦跟踪預报

赤欄发生时,局部海域水体中含有大量的赤瀬寨美,这样就可以通过卫星温梯技术,依据 海洋水色,海面温度(SST),叶绿素。的浓度来判断赤脂发生的海域,面积大小和移动扩散方向等。

随書监測技术的发展,卫屋通感按水近年来成为赤潮預視和滞估的有效手段。卫屋通感 同时,要测定不同藻类、不同叶绿素按度的光纖、牽握不可為整合 音等水体的光谱曲线; 卫星通感监测主要有三种方法。第一种是图像合成方法。多数赤潮观象的主要直观特征是海 水水色异常、与正常海水水色有明显的差异,利用这个特点、选择3个波段的图像进行最影色 台成,找到水色异常区,从而判断出赤潮区。第二种是海水基层温度(SST)的检测技术。海水 温度是赤潮发生与否的一个重要因子,赤潮发生的后海水温度的变化机理显著不同。可以通过 温度的识别来判断和预测赤潮的发生和消亡。在对赤潮发生的环境温度和赤潮发生后温度变 化情况进行系统分析的基础上,本章探讨了赤潮发生后海面表层温度变化的机理,并运用海面 建废场计算模型,对1998年9月发生在渤海的赤潮过程的海面温度变化情况作了系统的 析,且通过实际监测资料的对比、证明了海面温度场资料在赤潮通感监测中的作用。第三种是 海线细胞生物量的反流。利用且层图像进行波段运算,建立图像辐射亮度值与赤潮浮游植物 相能数量之间分关系。反演海表浮游植物细胞聚量,并利用赤潮生物如能数量的判断阈值测定 赤潮发生仅、微黄赤湖区面以、发生为流光等。

9.1.3 赤潮預測预警方案的评价

(1)总体性原则

建立的指标体系要能全面反映赤潮危害的各个方面。人类社会的生活环境是由自然环境, , 社会环境, 经济环境等构成的综合协调体, 其中, 个环节出限回题, 都会转, 他环节带来不 利的影响, 紫潮 实實 平导 如此。 因此, 在建设 评估 格據时要注意以下, 几个问题。

- ①不能只注意灾害的本身,赤襕灾害的本身规模大小、危害程度并不能直接反映赤襕灾害 损失的大小。
- ②不能只重视经济价值,而忽视可能造成的对社会秩序和人民心理健康的影响,也不能忽视赤潮对环境造成的影响,这些影响往往要在很长一段时间才能表现出来。

(2)客现件原则

在选取指标的过程中,应当以能真实反映赤潮发生过程及其危害的状况为准绳,不能带有 任何主观目的。对于赤潮灾害对渔业,水产养殖业,滨海旅游业,人民健康等方面造成的影响, 评估指标聚综合反映各方面的组失。

(3)空间性原则

赤潮发生的海域不同,影响赤潮发生的控制因子则不同,預灣、預警系统模型也不同。评 // 權型时至充分考慮到權型活应施鏈的物理, 化学和生物状况, 选择相应的具体评价指标。

(4)时间性原则

同一海域,不同季节,物理,化学和生物状况也差异很大,特别是由于气候和气象引起的各 种非潮因子变化很大。所以要根据不同季节,不同的气候、气象条件,选择评价系统模型的标准。

赤潮发生原因較資際,发生的机理至今尚无定论,其发生受海洋生物的生物学特性(生活 周期,增殖率、细胞迁移率和融震的形成与萌芽)、海水中的营养盐、水体稳定性、水体交换率、 上升流的存在,水温及盐度、海域的气象条件(风力、风向、气温、气压、日期强度、降崩)以及淡 水注入等影响。所涉及学科包括生物、物理、化学、力学、系统学等多门学科,因此需要广泛采 纳料研工作人员、专家学者、海洋监测人员的综合评价意见。故对于赤荆预腾预警系统方案的 评价银采用经合评价法。

当所有评价对象希望能在所有评价属性方面得到一个综合评价效果时,就要求有一个综合评价按。在评价时,当不同属性在评价者心目中所疑的地位,重要性有很大差别时,需要将这些属性放到总的系统评价环境中,权衡它们各自在其中所占的重要性,并定量地表示出来。为方便起见, 般常用规范化的权重系数,即用 即,表示第,个属性的权重系数,即"截起下式;

$$\sum_{i=1}^{n} W_{i} = 1 \quad (0 < W_{i} < 1, j = 1, 2, \dots, n)$$

获得权重系数的过程本身也是一个评价过程。用加权加法评分,就可以计算综合评分值 \tilde{S} , 即

$$\bar{S}_{i} = \sum_{i}^{n} W_{i} \bar{S}_{ij} \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

为了更直观一些,该方法也可以用矩阵表示,如表 9-1 所示。

表 9-1 加权加法评分矩阵表							
对象:		属性; 加权值	I W ₁	2 W ₂		R W _n	綜合评分值
	1		$\bar{\mathcal{S}}_{11}$	$\bar{\mathbb{S}}_{22}$		Š _{1n}	$\sum_{j=1}^{n} W_{j} \tilde{S}_{ij} = \tilde{S}_{i}$
	2		\hat{s}_{2t}	$\tilde{\mathbb{S}}_{22}$	***	3 _{2a}	$\sum_{j=1}^{n} \overline{W_{j}} \tilde{S}_{2j} = \tilde{S}_{2}$
				÷		:	:
			\vec{S}_{m1}	\bar{S}_{mlt}		Š,	$\sum_{i=1}^{n} W_{j} \tilde{S}_{nj} = \tilde{S}_{m}$

基于以上方案评价所遵循的推判,对系统方案的评价拟选用方案的总体性、推确性、时间 原则、空间原则以及可持续发展指标作为评价的属性,综合考虑将研工作人员、专家学者,海洋 起溯人员的评价意见,采用每位专家对评价属性的加权加法评分法进行打分,引对评价结果对 系统方案再进行评例和修正。

9.1.4 赤潮预测预警方案

有关赤潮預測, 预警系统的研究, 在国内外的研究历史比较短, 不同的学者根据自己研究 的领域提出不同的赤洞顶限方法,并在预报一些赤潮时取得了较为满意的结果。 胚至有的学 或试图建立一套普适的预报使题, 对不同海域进行赤潮的预报。 赤潮的发生是一个十分复杂 的开放过程, 华纯地考虑一种或几种自然或者人为因素都不能准确、全面反映赤潮发生机制的 本质规律。但是由于海烈场家的影响, 使得各个海域的不同季节又有很大的差异, 所以试图建 立有关赤潮照极的普遍模型。是最具组组、基至是不切含实际的。

根据不同海域的赤潮因子的具体特点,以及影响赤潮因子的因素的具体特征,建立适合特 定海域的赤潮預測,預警系统是比较实际可行的。以渤海南为例,对预测、预警系统的建立作 以下诊法。

首先、概据審详記測數据、建立描海河赤潮寨类种風數据库、 针对该海域赤满常见优势种 中助骨条藻、次光源、探源、顯藻、鞭形廊、长菱形藻、长声飞藻、海链藻、圆隙藻等进行生物学和 分类学的研究、片对新出现的赤潮寨类进行餐理和研究。 李磐各种赤潮寨类的生活特性和电 活史、井对有患赤潮进行重点研究、明确其需素机理和助治方法。 在此基础上,通过海洋圈隔 成验研究它们的生态动力学,建立其生态动力学被零。通过对模型的分析、求解和模拟找出相 发赤潮寨类的控制环境因子及其种群同的相互关系、这是赤潮预繁、预模和防治的关键所在。

其次、采用实地监测、地理信息系统技术等手段、建立缩海湾海域的环境污染海域的水环 境质量状况(COD) 数氮、亚硝酸氮、硝酸氮、活性磷酸盐、溶解氧、温度、cH 值、盐度、叶绿素 a 等指标)、将其输入信息库系统。并以考察水潮控制因了为重点、将陆源污染信息、社会经济、海 域利用等信息结合起来。可及时了解晦城哲非监的空间分布状况、为水潮的分析到该提供背景 依据.

再次、渤海湾为封闭的海域,根据封闭海域水文、气象等特点,建立渤海海域的季节性洋流 模型。在不同季节、报暂气象条件、如降雨、温度、风速以及由污染信息系统检测,强报的盐度 变化、判断可能发生的亦潮的种类,并结合相关亦潮藻类的生态动力学模型,建立耦合的生物、 化学和物理动力学模型。

此外,根据地理信息系统(GIS)和卫星運搬等技术建立非潮环境信息和灾害信息管理系统,辅助模型预测,股票系统,并对模型预视系统进行检验和评估。渤海海域亦溯预测,报警系统和标方家如图 9-2 所示。

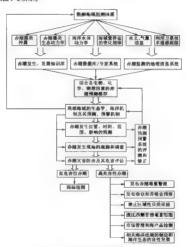


图 9-2 渤海海域未衡預測,預警系统初步方容

根据这个监测体系和相应的监测信息,便可以建立渤海湾赤潮的数据库/专家系统。在数据库/专家系统中,根据各种赤潮寨类的生态动力学模型,海洋动力学模型,以及渤海湾海域富营养化状况变化规律和该海域的水文、气象变化规律等信息,建立生物、化学、物理因素相模台的赤潮发生的数学模型和线斯域的生态海洋学机制,为赤潮的预测,预警,赤潮交高的阶治提

供理论基础。

为了对赤潮的灾害进行防治和进行评估,应建立赤潮灾害应急响应体系。根据预测、预警 系统可以加强对可能发生赤潮的海域的监测,并采取相应的防治措施,防止赤潮的发生。对于 不易采取防治措施的海域,要加强对赤潮发生位更,时间,花则、影响的预测、预报,并对赤潮发 生时的各项信息数据进行监测和研究。为评测和修正赤潮强测、质繁系统的数学模型提供实际 的数据。对于无害或低后老性赤潮。要跟踪检测,搜集发生过程中的相关数据信息;对于高危 宫性和毒性赤潮,要及时发布赤潮毒雾警报,进行实时,实地监控,强化赤潮毒素监测,并和险 业和养殖业的「作人员取得联系、提供预报信息、采取及时有效措施,防止赤潮发生、减小赤潮 灾害损失。在特定海域设定禁捕区,加强海产品的市场管理和检测,防止危害人民生命安全的 事件发生。

9.1.5 赤湖预测预警系统总体设计

1.需求规定

系统的主要输入项目为:监测海域的气象、水文以及赤潮藻类生物的监测数据。

系统的主要输出项目为:目标向量的预测结果、危害的等级以及相应的赤潮应急预案。

2. 运行环境

选用目前普遍使用 Windows 操作系统的 PC 平台作为本软件的开发平台,可以摘足本预警 系统的开发要求。采用 DELPHIT,0 作为开发环境,可以广泛利用 Windows 下的各种资源,如各种控件,0LE 对象等,其提供的数据控件,访问对象等可以方便地进行数据库系统的开发,并直接对底及进行访问。

3.设计原则

(1)系统性照刷

赤湖的预测、预警作为一个复杂的巨系统,必须坚持系统性的开发和设计原则。

(2)科学的防范原则

預警是为「給」是引提供风险可能发生的有效信息。指导人们及时采用相应的助危措施。因 而作例警系统必须具有严密的科学性。可以说,它是整个系统的灵魂和核心所在,因而也是 整个指警系统律立分理中;需则的基本级别。

(3)实用原则

任何一种新的方法在实际应用中必须以实用作为其生存的根本要求,建筑于新方法之上 的預測 預警系统也必须体现实用的原则,以便于推广和应用。

(4)两法结合的原则

目前理论界对预警系统的风险研究还不多,主要有两种基本方法:一是传统的概率分析方法,另一种是风险管理理论中的信号分析方法。此两种方法各有利弊。概率分析方法是根据所构造的模型,将各种指标数值同时代人计算发生的概率,因此具有结论明确的优点。但根据明确被发生两域的整体状况,不利下对水潮的监控与预防。信号分析法到能为风险提供明确的医测程图和警戒区间,提示风险发生的根率,为决策者进行监控,协调并采取相应的防范推施建供了指南。但它有一个缺点,即不能明确地抵测风险发生的概率,而这正是概率分析法的优点。本系统将这两种分析方法相结合,使整体结果得到优化。

9.1.6 赤潮預測预警系统结构

赤潮預測、預警系統由預測、預警信息 系統、預測、預警决策系统、以及預測、預警 均忽系统 . 部分组成。系统结构如图 9-3 所示。系統管結果而加图 9-4 所示

本系统由:大子系统组成,分别是: 预 测,预警信息系统,预测、频警决策系统和预 测、预警心急系统 下面分别对:个子系统 的由能和结构排行证明

1. 预测, 预警信息系统

預測, 预警信息系统属于本系统的硬件 支撑系统, 为本系统提供所有的原始影響数 据, 孩子系统由约 1 3 体监测网络和数据传 输网络组成 其一要功能, 自; 在"之"、"上物等 因素的严密监测。收集整理与赤棚形成相关 的等因素信息。亦测 5 体监测系统由定点 经验测系统, 海上物种监测系统, 中助种监测系统, 卫星标



指9.3 赤潮角劑, 物警系统结构框图



图 9.4 系统登陆界面

感监测系统和飞机遥感监测系统组成,其结构示意图如图95所示

为便于调查和分析, 人库内容需作统一的规定, 根据需要和方便, 建立了6类数据库, 分别 为水文气象库, 水质库 A、水质阵 B、浮游动物库、浮游植物库和底质库 共同记录项目为关键 字(指示年、月、日、站号)、监测时刻(见图 9-6)。



图 9-5 预测预警信息系统结构框图



图 9-6 系统数据库

各库分别的记录项目如下。

①水文气象库为水温、水色 透明度、气温、气1、风速、风向、海况、光照、天气观象刺潮汐。 ②水质库 A 为南观水振流测率目,包括盐度、溶解泵、pH 值、化学耗氧量、以及硅酸盐、强 酸盐、脊磷酸盐、磷酸盐 铵盐、甲硅素。的浓度 3)水质库 B 为铁、铜、锌、钴、钼、硒等微量元素的含量。

① 浮游动物库为网具类型、滤水量、绳长、总种数、密度、中文种名、拉丁文名、全网单种数、 单种密度。

○浮游植物底为总种数,全网总计数,中文名、拉丁文名、牛物量。

⑥底质库为底质类型、颜色、成分,以及磷酸盐、硝酸盐、亚硝酸盐、铵盐、硫化物、有机物的 浓度。

2.预测、预警决策系统

預測、預警決策系统是非溯級测衡警系 统的核心组成部分。其主要功能为对所输 人的数据向量采取多种方法的分析处理。输 出目标向量的预测值,并对预测值进行危害 评价,确定灾害等级 上要子模块包括数据 作力、家系统,统计预测系统,对能预测系 统,非线件动力净预测系统以及未潮危害评 价系统 非关系则图 9.7 9所示

数据库/专家系统由6类库文件和一系



图 9-7 預測、預警决策系统结构框图

列命令文件构成,其功能主要为对监测数据的收集、修改、检索、编辑、传输等

统计分析系统提取数据库中的数据进行多种统计方法的处理。并将检验合格的模型结果 有人模型件。基单的统计模块上要包括多元逐步回引模块、上成分分析模块、聚类分析模块、 混合而间槽推查。

智能预测系统提取数据库中的数据进行多种智能负离方法的处理、同时将检验合格的模型结果有人模型库 智能预测模块包括人 1 神经网络预测,遗传算法和模糊逻辑预测

动力学预测主要通过对典型概要建立生态动力学模型。得到未满生物量以及影响其增筑 和聚集的各种因素的时间变化函数 该种方法将青ო发生的过程看成 个动力学系统、考虑 海洋浮游生物的生长、死亡和它们之间的侧盘一被拥食关系、或者竞争问 营养资源的竞争关 系、自时也包括浮游生物吸收营养的时间滞后或浮游生物死亡后转化为营养物质的营养循环 再生关系等。

决策/评价系统功能为对统计预测、智能预测和动力学预测的结果进行综合评价,然后做 出决策,提供预测结果。

3.预测、预警应急系统

股侧、预警应急系统针对决策系统所计算的伪测试以进行危害评估,进而发布希腊预报以 及提供相应的应急对策见阻等 3. 亦而类型分为一类、即氮危害性亦谓、中危害性亦谓和高 危害性亦谓、针对不同类型的 4.3

危害评估模块主要用来评估由于赤襴产生而造或的经济损失(见图 9 9) 赤潮带来的经济损失包括以下 4 部分:

①油业经济损失:

②养殖业经济损失;

①旅游业经济损失;

①健康损害经济评估。



图 9-8 赤胸棕色对象



图 9-9 赤潮危害评估

应急预案模块针对决策系统和评估系统提供的赤稠危害信息提供相应的应急预案措施, 其结构如图 9-10 所示。

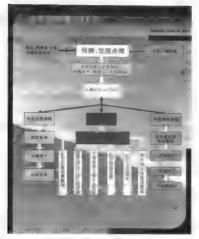


图 9-10 预测 角警房负表统结构框例

9.2 海洋生态系统管理的概念与原则

9.2.1 生态系统管理的概念

关于生态系统管理(ecosystem management)思想的起源已有很多论述(Malone, 1996; Grumble, 1994; Vogt et al. 1997)。有关生态系统及其管理方面的糖体性观点最早由 Loopod 提出。他认为,决定应该把土地当作一个"完整的生物体"一样加以关爱,并且会就让"所有的政和"保护良好的运转状态。20 世纪 60 年代以后,生态系统逐渐成为生态学的研究宣点。在此期间,由于国际生物学计划(图9)和 Odam、Van Dyne 和 Wat 等人的论著的影响,生态系统跨学科的研究相对"进一步的加强和系统化。尽管生态系统的概念已经有多年的发展过程,可是其定义和理论框架仍处在争议之中。在美国,直到 20 世纪 80 年代,生态系统管理,因研究对象、目的和专业角度的不同而产生了不同局定义和内涵。按年代顺序,一些比较有影响的生态系统管理。它发酵如此「任意搬。2001年

①Agee & Johnson (1988):生态系统管理指调控生态系统内都结构和功能、输入和输出,使 其达到社会所期望的状态。

②(Newbay(1992):生态系统管理指轄心巧妙地利用生态学、经济学、社会学以及管理学原理、长阴经营管理生态系统的生产。恢复或维特生态系统的整体性和所期望的状态、利用、产品、价值和服务。

③Society of American Foresters (1993): 生态系统管理是对一个集合体中的全部森林的价值 与功能配置进行景观水平维持的一种策略,包括全部所有着在内的景观水平上的协调管理。

④Forest Ecosystem Management Team, USA(1993);生态系统管理与单一生物种的规律相反, 是通过关联生态系统中所有生命体来管理生态系统的一种策略或计划。

⑤American Fortest and Paper Americation (1993):生态系统管理是在可以接受的社会:生物和 经济风险条件下生产必需的生活品,在满足公众的需求和期望的同时,维持生态系统健康和生产力的。种较需要系统。

⑥Grumbane等(1994):生态系统管理是以长期地保护自然生态系统的整体性为目标,将复杂的社会,政治以及价值观念与生态科学相融合的一种生态管理方式。这种管理是以顶极生态系统为主要对象,维持生态系统结构和功能的长期稳定性,保护当地(顶极)生态系统长期的熔体件。

②Wood(1994):生态系统管理是综合利用生态的、社会的和经济学原理,经营管理生物和 物理系统,以保证生态系统可持续性、自然界多样性和景观生产力。

③Christensen等(1996);十态系统管理是具有明确目可持续性的目标的,由政策,协议和实 股话动来保证实施的一种管理活动,它在对维持性态系统组成,结构与功能所必要的生态相互 作用和生态过程的最往理解基础上从事研究和监测,以不断改进管理的适合性。

⑤Boyce and Haney(1997): 生态系统管理是对生态系统进行合理经营管理以确保其可持续性。生态可持续性是指维持生态系统的长期发展趋势或过程,并避免损害或衰退。

(DDale 等(1999):生态系统管理是考虑了组成生态系统的所有生物体及生态过程,并且是 基于对生态系统的最佳理解的土地利用决策和土地管理的实践过程。

①任海等(2000):生态系统管理是基于对生态系统组成,结构和功能过程的最佳理解,在 定的时空尺度范围内,将人类价值和社会经济条件整合到生态系统经营中。以恢复或维持生 态系统整体件和可转接性。

②世界保护联盟(IUCN):生态系统管理是一种物理、化学和生物学过程的控制,它们将生

物体与外界非生物环境及人为活动的调节连接在一起,以创造---个理想的生态系统状态。良好的牛态系统管理将保持牛态系统功能的完整性,从而避免不希望见到的牛态和环境变化。

机构间生态系统管理组织将生态系统方法定义为一种维持或恢复自然生态系统和它们价 值分解的方法。它是由目标决定的,并且基于一种考虑未来的发展视角,使得生态、经济和 計合的因子倡以综合物理。

9.2.2 生态系统管理的原则

Sibthorp 研讨会将生态系统管理的原则总结为两个大的原则,即指导性原则和操作性原则,各自又包括5项且体原则。

1.指导性原则

- (1) 管理日标总社会的抉择
- 社会的选择将决定哪些生态系统要保护,该如何管理和如何利用。选择的基础是由需求、 价值和利益来判定的。生态系统管理需要平衡来自不同利益集团的需求冲突,也要权衡那些 大法到可转线发展而妥股的方法。
 - (2) 生态系统的管理必须考虑人的因言

人类是在地球上处于支配地位的物种。人类是生物生产力的最终使用者,并且随着人口 數量和消費的增加,人类的影响将越来越大。人类必须协调人类自己同自然界直接或间接作 用的方式。这就要求在生态系统管理中必须专业人的因素,所采纳的生态系统管理策略也必 须反胺人类的需要和能力。

- (3) 生态系统必须在自然的分界内管理
- 生态系统的保护存在事实上的限制。由于物质、技术、社会的多因素的影响、人类不能想 保护什么系统就保护什么系统,在谈到某一区域自然存在的生态系统要解决的问题时,考虑最 多的环岛补全的涨極。
 - (4)管理必须认识到变化是必然的
- 由于种群内部变化、进化和扩散以及外部环境的影响,生态系统总是处于变化的状态,传统意义上的"生态平衡"实际上是不存在的,系统总是处于应高平衡态的运动之中。生态系统中广泛存在着非线性和阈值效应。这种效应造成的结果就是常常会有突变的情况发生。因此,生态系统管理者必须拒绝稳态系统的假设,着服于那些表明环境变化和生态响应的最可能的故障为面的解别和分析。
 - (5)生态系统管理必须在适当的尺度内进行,保护必须利用各级保护区
- 生态系统管理必须在适当的尺度范围内进行才能成功。因为一个小的地方被其以外的过 规和活动所影响,所以人们越来越注意于基于景观单元的系统管理。

2. 操作性原则

- (1)生态系统管理需要从全球考虑,从局部着手
- 生态系统的最终尺度是生物圈。生物圈内各组分之间都存着相互联系。可以通过政府间 的築道来制定全球尺度的生态系统管理政策,如减少二氧化碳排放的国际公约,也可以通过国 家级的组织,来制定景观尺度上的生态系统管理政策。然而,地方或个人更关心的是诸如就 业,食物和健康等事情,因此,必须首先致力于解决当地由于人类压力引起的问题,然后到区 增,最后制金键。

(2) 生态系统管理必须寻求维持或加强生态系统结构与功能

健康的生态系统在其现有的结构下成功地实现着其功能。因此,生态系统管理必须努力 维持系统结构的完整性。

(3)决策者应当以源于科学的适当工具为指导

有效的生态系统管理必須基于自然的法則 基础的物理,化学和生物学过程最终将会限制人类的欲望和行动 科学面临的挑战是掌握控制自然环境的法则,以及引起的生物学动态变化,这是指导生态系统管理系的最重要的基础 有效的工具同专家们的知识相结合。是合理的生态系统管理系经的需要。科学应当承担更积极的角色,使政策制定者知道选择各种生态系统管理源径的后果。

(4) 牛杰系统管理者必须谨慎行事

由于自然界的高度复杂性、人类认识自然界毕竟是有限的。对于人类活动对生态系统造成的影响,人们缺乏全面的了解,更无法有效地去预测生态系统的变化和演替,因此人类在谨慎进行管理的同时,还要不断地进行生物学,社会学和经济学的评估。

(5) 多学科交叉的途径是必要的

生态系统有多种物理、化学、生物的和人类的组分。这就要求对生态系统的管理必须综合 各个领域的专家。

9.3 赤潮灾害的综合管理与防治

9.3.1 赤潮灾害的综合管理



到 9-11 赤潮灾害综合管理框架

赤潮峰虎于我国和世界各国沿海,是目 前国际社会共同关注的重大海洋环境问题 和生态灾害,赤潮灾害已成为侧约我国沿海 经济社会可持续发展的重要因素 系统行 效的赤潮管理已成为我国海洋资源与环境 保护的迫切需要 本节从生态系统管理的 观点提出了针对赤潮灾害的综合管理框架。 如图9-11 所示。

赤潮灾害综合管理框架包含两个层面 的管理方案、第一个层面就是要针对赤潮

这种自然灾害制定。系列相关管理政策和采取相应的措施。这个层面主要包括三方面的研究 与管理内容。

(1)建立实时的赤潮监控系统

亦獨庭側是赤陽的后上作的基础、在目前尚无快速有效的方法控制赤獨发生的情况下、加强赤綱监測、监视、预测、预警。是減少赤獨次害樹失的重免措施。 通过监测系统的建立,可以了解赤潮决定发生的特征、零提赤潮发生的时间, 地点以及灾时状态。2003年在法国名开门部洋生态系统及赤潮的实时监测系统会议(HABWATCH), 來自各国的科学家广泛交流(了自能界上该续域的高沿技大及研究方向。本饮会议对于建立实时有效的赤潮监测系统以及相能界上该续域的高沿技大及研究方向。本饮会议对于建立实时有效的赤潮监测系统以及相

关的监测技术和监测设备作「深入的探过和研究。在我国、国家海洋局近年来也不断加大对 赤潮的监控力度,已在全国重点海域建立了33个赤潮监控区,其中北海11个,东海13个,南 第9个,开展新解率,高密吸透视医测。做到监控区内,本潮发现率与分之百;成立了国家和地 方相结合、专业和群众相结合的全国赤潮监视监测网络;在赤潮发发测(每年4月至10月)及 频发海域,利用海洋卫星、海监飞机、海监船舶和焊基结等多种手段对赤潮发生情况开展连续 监控,及时掌握全部填赤潮发生动态;归口发布亦潮信息。指导沿海的养殖活动,取得明显成 传、

目前应用于赤潮灾害监测的技术主要有现场实地实时监测、海上定点浮标监测、航空监测 以及卫星温感监测等。

最適用的常規監測手段就是環路完確家時監測,主要通过船舶平台开展現场采样來实现 生物,化学以及物理因子的监测,缺点在于由于分析手段繁瑣,取得结果的周期长、速度機,因 此不适合余期的实时监测和预测。

海上評标自动監測技术是在20世紀90年代兴起的一种监测技术。它由于可以提供连续 的事功的以及相对"廉价"的监测数据而有着最大的应用前录。赤潮自动监测系统的研制技 未主氧机新挥标系统设计、提场采拌、塞尔的自动分析、近常分别及通信等环节。

航空預測是采用直升机等平台实理赤潮的監測及預警工作。其优点在于可以迅速取样 获得同步资料,覆盖面大以及分辨率高,这是发达国家监测赤潮等重要手段,缺点在于使用费 用及其昂贵而导致实用性差,不能作为及时监测和预规处工具。

卫星運感技术由于具有快速、同步和大范围監測海洋的能力、已被广泛应用于赤潮的监 则、英国 NOAA 从 1999 年开始利用卫星速感困像,海拌和气象观测资料、在佛罗里达西海岸开 展了赤潮生成条件和赤潮漂移腾径的预报。我国在达这方面开展了很多的研究:作。卫星遥 感技术的缺点在下观测间隔 写它向分辨率难以两全,而且易受天气云层影响。

该内容的另一方面是关于赤攤末高相关制度的確设。当前需要制定合国性的海洋赤潮监 闽中长朔计划和监测。预测技术规程、规范赤潮监测预测工作。国家海洋局已十2005年5月项 发了最新的外、潮监测技术规程》(HY/T/09-2005);机速专家顾问组,提供技术支持和容询, 开展有毒赤潮早期診断工作,开展贝类毒素检测和水潮生物分类有关工作。保证赤潮信息的全 面、可靠和正确。最后是要加强对海洋赤桐信息的管理工作。对全国的赤潮灾害信息采集、信 息传输、数据库建设、信息产品制作等实行统一的规范化管理、实施信息资料的精度和质量控制,在信息传输方面,建立全国赤潮灾害信息传输网络体系。保证赤潮灾害监测信息和预警预 报信息权向传输的可靠性和时效性。国家海洋局于2002年1月颁布了《海洋水潮信息管理智 行规定》。

我国海域辽阔,海岸线漫长,仅凭国家和有关部门力量,对海洋进行全国监视很难做到。 有必要把目前各主管海洋环境的单位,沿海广大层民、池业精鹅的,海上生产部门和社会各方 面力量组织起来,开展专业和群众相结合的海洋监视活动,扩大监视海洋的覆盖面,及时获取 赤鹳和与赤鹟有密切关系的污染信息。监视网络组织部门可根据工作计划,组织各方面的力 量对赤潮进行全面监视。特别是赤潮多发区,近岸水域,海水养殖区和辽河人海口水域要进行 严密监视,及时贫取赤潮信息。一旦及现赤潮和赤潮征光。监视网络机构可及时通知有关部 订上每组织在计划域进行解除影响型制度,提出治理措施,千方百计减少赤潮的食膏。

最后还要积极参与国际赤潮的研究组织和计划。

(2)加强赤鋼預測循拐技术的研究

准确及时地预测预报亦潮是减少亦潮损失的最有效指端。因此,为使亦潮灾客控制在最小限度,减少损失,必须积极开限参潮预报服务。众所周知,赤獭发生涉及生物,化学,水文,气象以及海洋地质等众多因素,目前还没有较完善的预报模式适应于预报服务。因此,应加级赤獭防报模式的研究,了解赤獭的发生,发展和消食机理。我因极早堤市原介赤獭文客问题的研究。较大的研究项目包括:国家自然科学基金"七五"重大项目"中国东南沿海赤獭发生机理研究",因家自然科学基金"九五"重大项目"中国东南沿海赤獭发生动力学及防治机理研究"以及国家科技部于2001年资助立项的国家重点基础研究(973)项目(我国近海有富赤獭发生的广东美海发生规则),这些项目的研究成果使得我国的赤獭灾害研究在国际上取得

·席之地。目前國际上主要約索蘭研究计划包括·玻璃间海委会(IOC)和国际海洋研究委员会 (SCOR)于1998年10月共同波起组织的"全球有害赤繭的生态学和海洋学研究计划"(GEO-HAB, Global Ecology and Ocennography of Harmful Algal Blooms),美国于1995年投巨赘成立的赤 潮生态学(ECOHAB)全国规划以及欧洲共同体提出的欧洲赤繭研究规划(EUROHAB, European Harmful Algal Blooms)。由于赤繭实宫的特殊性,一个国家的赤繭实宫同时也会成为另一个国 家英至多个国家的灾害。因此,赤繭的国际化合作是得光为重要。目前,较为大型的国际研究 计划已经建立了较为成熟的合作计划(见图912)。



图 9-12 国际赤潮合作计划

关于赤襕的国际会议也举行了多届,2004年在南非的开善教举行了第十一届国际赤潮会议。

(3)积极开展赤潮减灾技术的研究

当赤襕发生以后,人们所能采取的办法也就是尽電減少赤繃灾害所带来的损失。一方面, 需要建立赤襕应急预案制度。国家海洋局可以作为该行动方案的执行中心,负责协调各相关 部门的工作。当赤襕顶侧顶膏系线水即将有赤ې毒发的信息时,该行动中心应该迅速将赤 潮发生的时间,她点、规模、藻类毒素类型以及相关的实害等级通知相关孢业管理部门及养殖 者,另一方面就是参加强赤棚脂的技术的研究。

亦糊灾害综合管理框架的第二个层面就是基于梅洋生态系统的管理。赤潮灾害其实是梅 择生态系统"生烧"的。 特表规、因成、最根本的方法就是加强海洋生态系统的管理,使得海洋 生态系统可让转线翰姆德之地存在。

海洋生态系统的许多银介在不停地运动,并且具有极高的非线性,这些系统所支撑的食物 附还处于一种无序状态。因此破前海洋生态系统的管理带来了一定的风险。复杂自然系统也 许会以一种非线形方式对变化做出反应,小的变化也许全在一个生态系统中引起激烈的病理 行为。虽然关于大尺度海洋环境是否是在这样一个刀刃上维持平衡还是一个有争论的问题, 但对北太平洋中的物理和生物费据来源所作的一个新的评估表明,生物变量表现出人们所担 心的"非线性"行为。在实践中,这一结果表明在海洋生态系统管理中应考虑采取较为谨慎的 措施。

目前關际上存在的海洋生态系统管理模式包括:大海洋生态系统(large marine coopystem, LME)、综合海岸管理(integrated constal management, ICM)以及海洋保护区(marine protected area, MPA)。但是,这些管理模式还比较分散,没有组合在一起构成真正的以生态系统为基础的管理。 (联合国环境规划的区域海域计划)为实现真正以生态系统为基础的管理,提出了把上途 二者合面为一的管理模式,不过进度缓慢。

海洋生态系统管理与赤潮综合管理的切合点在于加强对于海洋污染物排放的控制,从而 建立一个良好的海洋生态环境。赤潮的发生与环境污染尤其是污染物的连续不断地输入存存 直接关系。在赤潮多皮区,为了控制海域的富贵州人。战争应业之禄等环境客量为基础的 物、为海岛量控制标准。合理分配与赤潮暴发相关的污染因于的排放总量。制定相关的政策和指 准、控制指海地区和流域的氦、磷烯用量和排放量。建立沿海陆域、裹和有机污染物的控制机 制;加大污染源的治理和区域污染等治的力度;加速沿海陆域的产业结构调整和城市污水处理 现,控制济政自身污染。具体包括。合理规划沿海海、炸翔空间布局和养殖结构,调整养殖种类 和规模。这进校嘅性养殖的饵料利用效率;开发并推广有机污染物生物降解技术,有效控制养 程自身污染,减少养殖区赤潮发生机会。张利民等(2004)提出了赤潮火客管理的多项建议;

- ①开展"中国赤湖灾害的预警预报服务":
- ②加强赤端灾害的信息管理:
- ③加强未潮贝毒管理:
- ⑤加强法制管理:
- ⑥做好赤潮科普知识的宣传教育与培训工作;
- ⑦制定赤潮监测的应急监测监视预案;
- ⑧建立健全赤淵灾害发生后的抗灾措施等。

9.3.2 赤潮的防治

随着赤潮现象在世界范围内的日趋频繁,其危害也日益严重。如何治理赤潮,降低其对海洋环境,水产养殖业及人类健康的危害,已成为人们普遍关注的一个大问题。

到目前为止,国内外提出的赤潮治理方法有多种,但真正能付诸应用的却寥寥无几。这主要是因为要使一种方法得到认可,必须符合"高效"无辜、价廉、易得"的要求"而目前很难找出 一种方法完全符合上述要求。但在水产养殖区内发生赤潮的紧急情况下,仍然有一些应急措 確可以采用。

对于小型的网络养殖,可以采用拖曳法来对付赤潮,也就是称李湖阿新从赤潮水体转移至 安全水域。这种方法简单易行,但前提条件必须生赤部仅在局部区域发生,而且在周围容易或 到安全的"避难区"。隔离法是另一种比较可行的应急措施。这种方法主要是通过使用一种不 渗透的材料将养殖网箱与周围的赤潮水隔高起来以降低赤潮的危害。同时应注意给网箱充

气,防止鱼类缺氧。

对于大面积的赤潮治理,现在国际上公认的一种方法是撤搁黏土法。黏土是一种天然矿物,具有来源丰富,成本低、无污染的技术。中国科学股海洋研究所在国际上率先特累酸作用,理论应用下黏上沿度赤潮的机理与方法研究,提出了提高黏土。矿物聚酸能力的表面或性型处并分别通过"插人法"和"吸附法"制备出聚醛效率较原土高几十倍的改性黏土,去除率达50%以上,能够有效地抑制有害赤潮的发生。成为目前国际上普遍借靠的技术与方法。化学药品杀除法也是使用较早和发胀较快的一种方法。这种方法就是利用特定化学药品直接承死赤潮等。但是对于这种方法、很易于造成海洋的一次污染。因此国际上零灾用于杀死赤潮生物的化学药品必须具有以下几个特点:首先,可以在较低浓度的情况下迅速杀死赤潮囊类;其次,这类化学药品在海水中易于分解和消失,最后就是这些化学药品必须对其他的海洋生物影响小。还有一种化学方法就是整囊剂沉淀法。这种方法主要是利用最豪利使赤潮生物聚集,沉降。现在用的比较多的整集剂有,上机跟囊剂,表面结性剂和高分于聚聚剂。

附录1 第6章用到的主要程序

```
1. 速入數据及标准化
source("standard.r")
red < - scan(file = "e-/redtide/red.txt", what = list(double(0), double(0).
double(0), double(0), double(0), double(0), double(0), double(0),
double(0), double(0), double(0), double(0), double(0), double(0),
double(0), double(0), ), skip = 1);
facname < - c("sr", "ws", "p", "t", "pH", "sd", "COD", "DO", "PO4",
"Si", "NO3", "L", "month", "chla", "NO2", "NH4"); names(red) < - factagne;
red < - as . data . frame(red);
for(i in 1:length(red))
tmmp < -! is. na. data. frame(red); red < - red [tmmp[.i].]:
ld < - red $ L:
names(ld) < -"L" fac < -red[-c(12,13)]; fac[[1]] < -factor(fac[[1]])
cato < -data \cdot frame(sun = rep(0, length(fac[[1]])), cloudy = rep(0, length(fac[[1]])),
                     painy = rep(0, length(fac[[1]]));
for(i in 1; length(fac[[1]]))|
if(fac[i,1] = = 1) | cato $ sun[i] = 1 |
else if(fac[i,1] = = 3) | cato $ cloudy[i] = 1 |
else cato $ rainv[i] = 1
b < - cbind(cato, standard(fac[2:14]) $ x) .
adid < - standard(ld) $ x
sam < -c(5.19.59); ldfit < -sdld[-sam]; facfit < -b[-sam];
xpld < - adld[sam]; xpfac < - b[sam.];
2. 回归树的随机梯度 Boosting 分析
library(gbm);
gbm1 < - gbm, fit(facfit, ldfit, # dataset
     var, monotone = rep(0,16), # -1: monotone decrease,
                               # bernoulli, adaboost, gaussian,
    distribution = "gaussian".
                                         # poisson, and coxph available
                                          # number of trees
     n. trees = 2000.
     shrinkage = 0.001,
                                        # shrinkage or learning rate.
                                         # 0.001 to 0.1 usually work
                                     # 1: additive model.
      interaction depth = 3.
                                        #2; two-way interactions, etc.
     bag.fraction = 0.5,
                                      # subsampling fraction, 0.5 is probably best
```

```
train fraction = 1.
                                 # fraction of data for training.
                                        # first train.fraction * N used for training
                                      # minimim total weight needed in each node
    n minobsinnede = 10.
    keep . data = TRUE .
                                        # keep a copy of the dataset with the object
    verbose = TRUE)
                                        # print out progress
hest, iter < - ghm, perf(ghml, method = "00B")
f. predict < - predict, gbm(gbm1, xpfac, best. iter)
print(f. predict)
print(xpld)
print((xpld-f, predict)/xpld)
pretty.gbm.tree(gbml,best.iter)
summary(gbm1, n, trees = best, iter)
oneway, test(1 \sim sr, data = data.frame(1 = sdld, sr = fac[[1]]))
anova(lm(l \sim ar, data = data, frame(l = sdld, ar = fac[[1]])))
par(mfrow = c(2,2)) plot. gbm(gbm1,5.hest.iter)
plot.gbm(gbm1,11,best.iter) plot.gbm(gbm1,7,best.iter)
plot, abm(abm1, 10, best, iter)
twodep < -plot.gbm(gbm1, c(5, 11), best.iter, return.grid = TRUE)
wireframe(v ~ p * PO4, data = twoden.
            scales = list(arrows = FALSE),
            drape = TRUE, colorkey = TRUE,
            screen = list(z = 30, x = -60)
twodep < -plot.gbm(gbm1, c(7, 10), best.iter, return.grid = TRUE)
wireframe(v ~ pH * DO, data = twodep,
            scales = list(arrows = FALSE).
            drape = TRUE, colorkey = TRUE,
            screen = list(z = 30, x = -60)
twodep < - plot.gbm(gbm1,c(11,7),best.iter,return.grid = TRUE)
wireframe(y ~ pH * PO4, data = twodep,
            scales = list(arrows = FALSE),
            drane = TRUE, colorkey = TRUE,
            screen = list(z = 30, x = -60))
3. 多元自适应样条回归
library (mda)
fit1 < - mars(facfit, ldfit, degree = length(facfit));
 f. predict < - predict(fit1, xpfac) print(f. predict) print(xpld)
 print((xpld-f.predict)/xpld)
4. 支持向量机回归
 library(e1071)
```

```
svm1 < - svm(facfit, ldfit); summary(svml);
f. predict < - predict(syml.xpfac) print(f.predict) print(xpld)
print((xpld-f.predict)/xpld)
5 人工抽经网络
library(nnet)
ann1 < - nnet(facfit, ldfit, size = 2, rang = 0.1.
              decay = 5e-4, maxit = 200)
f. predict < - predict(annl.xpfac) print(f.predict) print(xpld)
print((xpld-f.predict)/xpld)
6.回归納預測
library(tree)
fitdata < - data frame (L = ldfit facfit)
tree! < - tree(L ~ . , fitdata) plot(print(Invi))
tree1.cv < - cv.tree(tree1..prune.tree)
for(i in 2:5) tree1.cv $ dev < - tree1.cv $ dev +
    cv.tree(tree1..prupe.tree) $ dev
tree1.cv $ dev < - tree1.cv $ dev/5 plot(tree1.cv)
f. predict < - predict(tree1, xpfac) print(f, predict) print(xpld)
print((xpld-f, predict)/xpld)
7. 投影寻踪回归
red.por < - por(x = facfit, y = ldfit, nterms = 2, max.terms
= 7. sm. method = 'gcvspline');
f. predict < - predict(red.ppr,xpfac) print(f.predict) print(xpld)
print((xpld-f.predict)/xpld)
8. 自定义标准化函数
standard < - function(newdata)
     if(missing(newdata)) stop('input origin data')
          x < - as, matrix(newdata)
          m < - nrow(x)
          n < -ncol(x)
          xmin < -rep(0, n)
          xmax < -rep(0, n)
          for( i in 1:n)
             ([i, ]x)_{nim} - [i]_{nimx}
             xmax[i] < -max(x[,i])
           x[.i] < -(x[.i] - xmin[i])/(xmex[i] - xmin[i])
```

result < - list(x = x, xmin = xmin, xmax = xmax)
return(result)

附录 2 第 8 章数据 redtide.data(10⁻⁵·L⁻¹)

3	.929 4	3.776 3	3.750 3
3	.651 0	3.536 0	4.386 6
4	.304 2	3.650 8	3.501 6
3	.669 8	4.074 3	4.538 8
4	.962 4	3.885 2	3.946 8
3	.275 5	2.839 5	3.705 1
3	.706 7	3.389 0	3.695 2
3	.303 5	3.349 4	3.9767
4	.346 4	4.272 6	3.380 1
3	.132 8	2.718 7	2.542 1
3	.996 6	4.400 5	4.409 3
3	.545 4	4.634 0	3.936 6
5	.647 6	3.293 7	3.596 5
2	.931 5	3.505 4	3.252 1
4	.190 7	3.583 9	2.675 8
3	.058 4	3.664 3	2.698 2
3	.363 0	4.750 6	3.1144
3	3.317 5	4.156 0	3.547 5
4	.385 9	4.665 1	4.961 5
4	1,903 8	2.708 2	3.958 2
3	3.756 5	3.956 8	3.153 4
3	3.352 7	4.128 4	3.711 6
- 4	1.711 1	3.550 6	3.100 8
4	1.237 8	5.134 8	4.365 4
3	3.958 3	2.816.3	4.342 7
4	1.518 9	2.885 2	4.263 9
2	3.328 7	3.996 5	4.229 4
4	1.000 0	3.229 4	3.395 1
3	3.578 1	4.375 8	3.589 5
3	3.878 2	3.277 4	4.011 3
2	2.937 4	3.142 3	3.605 1
4	4.406 4	4.858 4	4.143 3
	3.372 7	3.424 8	3.311 0
:	3,191 7		

1. 求格函數值的函數·kernel. value

附录 3 第 8 章用到的主要程序

```
"kernel . value" < -
function (solut.b)
      ub < - NULL.
      Inte < - list()
      xb < − redtide, data
      n < - length(xb)
      m < - length(xdat)
       v < -matrix(0, ncol = m, nrow = 1)
      for(ib in 1:m)
                 count < -0
                 k < -0
                 for(i in 1:n)
                           ub < -(xdat[ib] - xb[i])/b
                           if(ub > = -1 & dub < = 1)
                                     k < -0.75 * (1 - ub^2)
                           else
                                     k < -0
                           count < - count + k
                 y[ib] < -count/(n * b)
       Inte $ ker < - y
       print(Inte[c(1)])
       invisible(Inte)
2. 求极大似然估计的函数: gpd. fit
"gpd. fit" < -
function(xdat, ufun, npv = 365, ydat = NULL, sigl = NULL, shl = NULL, siglink
= identity, shlink = identity)
```

```
# obtains mles etc for god model
z < - list()
z $ trans < - F
if(is.function(ufun)) |
z $ trans < - T
u < - ufun(1:length(xdat))
else |
if(length(ufun) = = length(xdat))
n < - ufun
else u < - ren(ufun, length(xdat))
xdatu < - xdat[xdat > u]
xind < - (1; length(xdat))[xdst > u]
u < - u[xind]#
# if routine fails try changing initialization values
# of in l and in2
н
in2 < - scrt((6 * var(xdat))/pi)
in1 < - mean(xdat, na.mm = T) - 0.57722 * in2
if(is.null(sigl))
sigmat < - as.matrix(rep(1, length(xdatu)))
siginit < - in2
else l
z $ trans < - T
sigmat < - cbind(rep(1, length(xdatu)), ydat[xind, sigl])
siginit < - c(in2, rep(0, length(sigl)))
if(is.null(shl))
shmat < - as.matrix(rep(1, length(xdatu)))*
shinit < -0.1
else
z $ trans < - T
shmat < - chind(rep(1, length(xdatu)), ydat[xind, shl])
 shinit < - c(0.1, rep(0, length(shl)))
```

```
init < - c(signit, shinst)
npsc < - length(sigl) + 1
npsh < - length(shl) + 1
assign("xdat", xdat, frame = 1)
assign("sigmat", sigmat, frame = 1)
assign("sigl", sigl, frame = 1)
assign("siglink", siglink, frame = 1)
essign("shmet", shmet, frame = 1)
assign("shl", shl, frame = 1)
assign ("shlink", shlink, frame = 1)
assign("xdatu", xdatu, frame = 1)
assign("xind", xind, frame = 1)
assign("u", u, frame = 1)
assign("n", length(xdat), frame = 1)
assign("npy", npy, frame = 1)
z 3 model < - list(sigl, shl)
z $ link < - deparse(substitute(c(siglink, shlink)))
if (is, function (ufun))
z $ threshold < - departe(substitute(ufun))
else z $ threshold < - ufun
z $ nexc < - length(xdatu)
z $ data < - xdatu # cat(god, lik(init), fill = T)
x < - nlmin(gpd. lik, init, max. fcal = 1000, max. iter = 950, print = 0, d
= c(rep(1/var(xdat), npsc), rep(1, ripsh)))
npec < - length(sigl) + 1
ac < - siglink(sigmat \% * \% (x $x[seq(1, length = npsc)]))
npsh < - length(shl) + 1
xi < - shlink(shmat % * % (x $ x[seq(npec + 1, length = npsh)]))
z $ conv < ~ x $ converged
z $ nllh < - god. lik(x $ x)
h < - hess(god.lik, x $x)
z $ vals < - cbind(sc, xi, u)
if(z $ trans)
z $ data < - - log(as.vector((1 + (xi * (xdatu - u))/sc)^(-1/xi))
)
z $ mle < - x $ x
z $ rate < - length(xdatu)/length(xdat)
```

```
z $ se < - sqrt(diag(h))
z $ cov < - h
2 $ n < - n
z $ npy < - npy
z $ xdata < - xdat
if(z $ trans)
print(z[c(2, 3)])
if(length(z[[4]]) = = 1)
print(z[4])
mint(z[c(5, 7)])
if(z $ conv)
print(z[c(8, 10, 11, 12)])
invisible(z)
3. 画模型诊断图的函数: god. dise
"god . diag" < -
function(z)
 # produces diagnostic plots for gpd model
 # estimated using gpd, fit with output stored in z
n < - length(z$data)
x < - (1:n)/(n + 1)
if(z $ trans)
par(mfrow = e(1, 2))
plot(x, 1 - exp( - sort(z $ data)), xlab = "Empirical",
vlab = "Model")
abline(0, 1, col = 4)
 title("Residual Probability Plot")
 plot( - log(1 - x), sort(z $ data), ylab = "Empirical",
xlab = "Model")
 abline(0, 1, col = 4)
 title("Residual Quantile Plot (Exptl. Scale)")
 else }
 par(mfrow = e(2, 2))
 gpd.pp(z $ mle, z $ threshold, z $ data)
```

参考文献

- [1] 蔡如恆,夜光濂密度的人工神经网络預測模型[J].中国环境监测,2001,17(6):52-55.
- [2] 曹建揭,韩崇昭,方洋旺.非线性系统理论及应用[M].西安:西安交通大学出版社, 2001.
- [3] 曹庆杰,非线性系统随机振动与分叉理论研究[D]、天津: 天津大学, 1991.
- [4] 常战革 人为的灾害——红潮[1], 厂业安全与环保, 2002, 28(7):29-31,
- [5] 陈孝麟, 图隔生态系统内富营养化引起赤潮的初步研究[J]. 海洋与湖阳,1992,23(3): 312-317.
- [6] 陈予知.唐云. 非线性动力学中的现代分析方法[M], 北京:科学出版社, 1992.
- [7] 陈予恕,非线性振动系统的分岔和混沌理论[M],北京:高等教育出版社,1993.
- [8] 程振波,河北省黄骅市沿海赤潮的初步研究[J].海洋通报,1992,11(4):103-106.
- [9] 准伟东、图志华、支持向量机研究[1]、计算机工程与应用、2001(1):58-61.
- [10] 单志欣, 渤海赤潮防治对策的探讨[J]. 海洋渔业, 1992, 14(1): 26-28.
- [11] 冯十结,李凤岭,李少曹,海洋科学导论[M],北京:高等教育出版社,1999.
- [12] 冯剑丰, 渤海赤潮生态系统动力学与预测研究[D]. 天津;天津大学, 2004.
- [13] 冯剑丰,王洪礼. 渤海赤潮預測預警系统研究[J]. 东北师范大学学报, 2003(7); 234 -235
- [14] 高景兰、营养盐和微量元素与黄蜂赤潮的相关性[J]、黄渤海海洋,1997,15(2):59-63
- [15] 義遇,张淑杰、对1998年渤海赤棚的发生与气象条件的研究:渤海赤潮灾害监测与评估研究文集,2000[C],沈阳;沈阳区域气象中心研究所,2000.
- [16] 養强, 韩玺山, 除鵬舞. 气象卫星遥感在监测辽宁近海赤潮中的应用[J]. 辽宁气象, 2000. 3: 25-26.
- [17] 谷颢,項有堂.象山港海域富营养化与赤潮的关系[3].海洋环境科学,2002,21(3): 67-69.
- [18] 颠元宪,陈飘松,张洪武.结构动力方程的增维精细时程积分法[J].力学学报,2000, 32(4):447-456..
- [19] 管玉平, 林 -骅. 赤潮數值研究的有关问题[1]. 海洋預报, 1996, 13(4); 27-30.
- [20] 郭皓,有害藥华监视监测实施细则:渤海赤潮灾害监测与评估研究文集[C]. 沈阳:沈阳区域气象中心研究所,2000.
- [21] 洪君超, 呂頌辉, 中肋骨条藥赤潮发生[J]. 暨南大学学报:自然科学学与医学版, 1995, 16(1), 131-136.
- [22] 洪再吉, 韦博成, 等. 非线性回归模型[M]. 南京: 南京大学出版社, 1986.
- [23] 候振挺, 刘再明. 数学生态学随机模型[J]. 生物数学学报, 2000, 15(3): 301-307.
- [24] 胡岗、随机力与非线性系统[M]. 上海:上海科学技术出版社,1995.

- [25] 胡岗、黄井华、郑志刚、混沌控制[M]、上海、上海科技教育出版社、2000。
- [26] 华泽爱、赤潮灾害[M]、北京: 海洋出版社, 1994.
- [27] 黄承正, 南海赤湖数据库和管理库[1], 海洋信息, 1993 (11): 11-13.
- [28] 黄象鼎、曾钟钢、马亚南、非线性数值分析[M], 武汉; 武汉大学出版社、2000.
- [29] 黄小平,黄良民,潭烨辉,等.近海赤潮发生与环境条件之间的关系[J],海洋环境科 学.2002.21(4):63-69
- [30] 黄锐航,史冬梅.赤潮发生机理研究及海洋原甲藻的氮营养生理特征[J].海洋与湖沿、1997、28(1)、33-38
- [31] 黄秀清, 蒋晓山、长江口海区~次骨条幕赤潮发生过程的多元分析[J]. 海洋环境科学、2000, 19(4): 1-5.
- [32] 黄秀清, 将晓山、长江口中肋骨条蓁发生过程环境要素分析: 水温、盐度、DO和 pH特征[1]、海洋涌损、1994、13(4): 35-40.
- [33] 黄奕华,楚建华,齐雨藻。南海大鹏湾益田海域骨条藻敷量的多元分析[J]。海洋和朔 泊、1997、28(2): 121~126.
- [34] 檔文穀、郝建华、俞志明、等、有客赤潮敷值分析研究进展[J]. 海洋与潮阳,1999、 30,568-574
- 30:568-574.
 [35]

 「36]

 「37]

 「37]

 「38]

 「30:568-574.
- [36] 暨卫东,许昆灿、陈砚.厦门港赤潮发生区营养盐含量变化与水文、生物因素的关系; 厦门港赤潮调音研究论文事[C]、厦门: 闽家海洋局第三海洋研究所、1993。
- [37] 蒋晓山,黄秀清.水温、盐度、DO、pH 与赤襕清长的关系[J].海洋信息,1991,(10):32
- [38] 住守茹 温威技术用于贮测施水水质[1] 北京测绘, 1999(4): 44-46.
- [39] 新晓阳. 透明度作为赤潮預警监测参数的初步研究[J]. 海洋环境科学,2001,20(1): 27-31
- [40] 李紹、渤海赤湖非线性预测预警系统研究[D], 天津: 天津大学, 2002,
- [41] 李胜朋,王洪礼。冯剑丰. 渤海湾赤潮寨类浓度与环境因子的非线性相关分析[J]. 海 洋技术,2004,23(3);82-84.
- [42] 李帙,史致丽,李俊,张金良. 营养盐对中肋骨条藤和新月菱形藤部分生化组成和性 质的影响[1]. 海洋与湖沼,2000,31(3):239-244.
- [43] 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析[M]. 第 4 版. 北京: 清华大学出版社, 2001.
- [44] 樂古昌,安敦、渤海湾南部近岸海域 1989 年赤瀬的調查与研究:海洋环境监测文集 (C]、天津,天津市环保局、1995。
- [45] 樂舜华,张紅标. 大鸛湾盐田水域赤鸛期间水质锰的变化規律[J]. 海洋通报, 1993, 12 (2), 13-16.
- [46] 廖晓昕, 动力系统的稳定性和应用[M], 北京; 国防工业出版社, 2000.
- [47] 林祖享,梁舜华. 探讨运用多元回归分析预报赤潮[J]. 海洋环境科学,2002,21(3):1-4.
- [48] 刘彬昌. 黄骅近海及津涂水域环境与赤襕形成初探[J]. 海洋环境科学, 1993, 12(3): 69-75.

- [49] 刘彬昌,张守法、黄骅赤淝的水化学环境[3].海洋科学,1991 (6): 35-38.
- [50] 刘次华. 随机过程[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 2000.
- [51] 刘嘉焜.应用随机过程[M].北京;科学出版社,2000.
- [52] 刘江华,程君实. 支持向量机训练算法综论[J]. 信息与控制, 2002, 31(1): 45-50.
- [53] 刘令梅. 赤潮的监测技术和防治措施[J]. 海洋技术, 1998, 17(3): 58-65.
- [54] 刘同明. 数据挖掘技术及其应用[M]. 北京: 国防工业出版社,2001.
- [55] 刘先斌,陈大鹏,陈虬.实噪声参兼一类余维2分叉系统的最大Lyapunov指数(I) [1],应用数学和力学、1999、20(9): 902-912.
- [56] 刘先斌,陈大鹏,陈虬.实噪声参崴---英余维2分叉系统的最大 Lyapunov 指数(Ⅱ) [1],应用数学和力学、1999、20(10): 997-1003.
- [J]. 应用数学和力学、1999、20(10): 997 1003.[57] 刘先雄、陈虬、主噪声参着 Hoof 分叉系统研究[J]. 力学进展、1997、29(2): 158 166.
- [58] 刘先斌,陈虬,陈太鹏,白噪声参敷 Hopi 分叉系统的两次分叉研究[J].应用数学和力 些、1997、18(9)、779 - 788.
- [59] 刘先斌,陈虬,陈太鹏,非线性随机动力系统的稳定性和分岔研究.力学进展,1996, 26(4):437-452.
- [60] 刘先斌, -类随机分叉系统概率1分叉研究[1]. 固体力学学报,2001,22(3):297-302.
- [61] 刘曾荣、混沌微扰判据[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1994.
- [62] 刘正荣,李排彬,哈密顿系统与时带微分方程的周期解[M].北京:科学出版社,2000.
- [63] 柳回春,马柯元,支持向量机的研究现状[』].中国图像图形学报,2002,7(6):618-623.
- [64] 陆斗定,虾塘赤瀬灾害的防治对策:赤瀬监测与预报研究论文选编,2000[C]. 杭州: 国家海洋局第二海洋研究所。
- [65] 陆启韶、常徽分方程的定性方法和分岔[M]. 北京:北京航空航天大学出版社,1989.
- [66] 陆启韶, 分岔与奇异性[M], 上海; 上海科技教育出版社, 1995.
- [67] 離文聪,杨柳.支持向量机算法用于夜光藥密度建模[J]. 计算机与应用化学,2002,19 (2):706-708.
- [68] 罗雪晖,李霞. 支持向量机及其应用研究[』]. 深圳大学学报:理工版,2003,20(3):40 -46.
- [69] 茆诗松,回归分析及其试验设计[M],上海;华东师范大学出版社,1981.
- [70] 欧俊豪.应用概率统计[M]. 天津; 天津大学出版社, 2000.
- [71] 彭仕政,蔡绍洪,唐廷林. 非线性系统的随机过程[M]. 贵阳:贵州人民出版社,2001.
- [72] 齐丽蓁, 楚建华, 诱发海洋褐胞藥赤潮的环境因素分析[J]. 海洋通报, 1993, 12(2): 30-34.
- [73] 邱德全, 林永水, 江静波. 海洋有毒甲藥研究[J]. 南海研究与开发, 1995, 9: 37 46.
- [74] 裘春蕉, 吕和祥, 蔡志勤. 在哈密顿体系下分析非线性动力学问题[J] 计算力学学报、 2000, 17(2): 127-132.
- [75] 袭宗無. Mathematica 數學软件系统的应用及其程序设计[M]. 北京: 北京大学出版社, 1994.

- [76] 任荣珠,梁源高. 莱州湾西部海域赤潮分析[J]. 海洋通报, 1993, 12(4): 116-118.
- [77] 戎海武,方同. 二阶线性随机微分方程的渐近稳定性[J]. 应用力学学报, 1996, 13(3);
- 72. 78. [78] 戊海武, 孟光, 王向东, 等, FPK 方程的近似闭合解[J]. 应用力学学报, 2003, 20(3): 95.-98
- [79] 戎海武,孟光,徐伟,等.二阶随机参撒系统的 Lyapunov 指數和稳定性[5]. 振动工程学程,2002,15(3):295-299.
- [80] 戎海武,孟光,徐伟,等、二自由度耦合线性随机系统的最大 Lyapunov 指数和稳定性 [J],应用力学学报、2000、17(3):46-53.
- [J]. 应用刀字字报, 2000, 17(3): 46-53.
 [81] 戎海武, 王命字, 方同. : 阶随机系统的 Lyapunov 指數与稳定性[J]. 振动工程学报,
- 1997, 10(2): 213-218. [82] 戎海武,王命宇,方同、隨机 ARNOLD 系统的稳定性与分叉[J]. 应用力学学报,1996,
- 13(4); 112-116. [83] 改海武,徐伟,方同. 二自由度轉合非线性隨机系统的最大 Lyapunov 指數和稳定性
- [85] 沈菲, 渤海赤潮預測預警研究[D], 天津; 天津大学, 2003.
- [86] 沈菲,王洪礼,冯剑丰.知识发现在赤潮预测预警系统研究中的应用[J].海洋技术, 2004. 23(3): 82-84.
- [87] 才世俗、神经网络系统理论及其应用[M] 北京·科学出版社、2000。
- [88] 史忠植、知识发现[M],北京: 清华大学出版社、2002.
- [89] 孙德山,吴今培. 基于 SVR 的混沌时间序列预测[J]. 计算机工程与应用, 2004, 12 (2): 54-56.
- [90] 孙冷,黄朝迎.赤潮及其影响[J]. 灾害学, 1999, 14:51 54.
- [91] 孙强,杨燕明,顾德宇,等. Sea Wifs 探測 1997 年闽南赤潮模型研究[J]. 台湾海峡、 2000, 19(1):70-73.
- [92] 唐云,对称性分岔理论基础[M].北京:科学出版社,2000.
- [93] 陶卿,姚穆. 一种新的机器学习算法: Support Vetctor Machines[J]. 模式识别与人工智能, 2000, 13(3): 285-290.
- [94] 陶庆生. 计算机代数及其应用[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 1991.
- [95] 田畴, 李群及其在微分方程中的应用[M], 北京; 科学出版社, 2001,
- [96] 田从华, 邓义祥. 我国赤潮的预测与控制研究现状[J]. 环境科学译从, 1998, 6(6): 73 -77.
- [97] 田盛丰,黄厚宽. 基于支持向量机的数据库学习算法[J]. 计算机研究与发展,2000, (1): 17-22.
- [98] 万振文、袁业立、海洋赤潮生态模型参数优化研究[J]、海洋与湖沼、2000, 31(2); 205
- [99] 王安利,王维娜. 虾拖赤襴与环境因子关系的研究[』]. 海洋通报,1995,17(2):128-133.

- [100] 王冬云,黄淼欹、海水富营养化评价的人工神经网络方法[J]. 河北建筑科技学院学报、2001、18(4); 27-29.
- [101] 王洪礼,非线性动力学理论及应用[M],天津:天津科学技术出版社、2002、
- [102] 壬洪礼,冯剑丰,李超,等.多种群赤潮生态模型的非线性动力学研究[J].天津大学学报,2003,36(4);400-403.
- [103] 王洪礼,冯剑丰,沈非. 渤海赤潮寨类生态动力学模型的非线性动力学研究[J]. 海洋 技术,2002,21(3):8-12.
- [104] 王洪礼,李超,冯剑丰,等.赤潮寨类营养盐限制方程的非线性动力学研究[J]. 海洋技术,2003,22(1):40-44.
- [105] 王洪礼, 王长江, 渤海海域环境污染研究[J], 东北亚论坛, 2003(12); 91-93.
- [106] 王洪礼,张琪昌,非线性动力学理论及应用[M],天津:天津科学技术出版社,2002.
- [107] 王继生,高保成.支持向量机在交通量預測中的应用[J].信息技术,2004,28(4):8 -10.
- [108] 王景常,吴景社,支持向量机在地下水位预报中的应用研究[J].水利学报,2003(5); 122-128.
- [109] 王姜功、赤潮灾害、研究与防治[J]、海洋信息、1998(8): 23-25.
- [110] 王寿松、夏综万、大鵬齊夜光藥赤潮的苔养盐动力学模型[J]、热带海洋、1997(1): 1
- [111] 王寿松, 刘子煌. 封闭环境中赤潮发生过程的數学模拟[J]. 海洋与期阳, 1998, 29 (2): 163-168.
- [112] 王旭,史道济、极值理论在金融风险价值中的应用[3]. 技术经济数量经济研究,2001 (8): 109-111.
- [113] 王旭,张占海,赤襕的研究和預报[J],海洋预报,2001,18(1):65-72.
- [114] 王正方、张庆、长江口溶解氧赤洲顶报筒易模式[J].海洋学报,2000,22(4):125-129.
- [115] 王正方,张庆.氮、磷、维生素和凝量金屬对赤潮生物海洋原甲藥的增殖效应:赤潮监 满与预报研究论文选编[C]、杭州:国家海洋局第二海洋研究所,2000.
- [116] 韦博成,近代非线性回归分析[M],南京;东南大学出版社,1989.
- [117] 魏新,冯兴杰. 基于支持向量回归的机场旅客吞吐量预测[J]. 中国民航学院学报, 2004. 22(3): 45-47.
- [118] 吳京洪,李鎔善,人工神经网络预报浮游植物生长趋势的研究[J].中山大学学报;自 然科学版,2000,39(6):54-58.
- [119] 吳京洪,李錦蓉.大亚湾澳头埔养殖区赤潮与环境的关系研究 I:浮游植物总生物量与环境因子的关系[J]、中山大学学报;自然科学版,2001,40(3):37-40.
- [120] 吴京洪,杨秀环,唐宝英、等、人工神经网络预报浮游植物生长趋势的研究[J].中山大学学报,自然科学版、2000、39(6):54-58.
- [121] 吴玉霖、周成旭、烟台四十里湾海紅色裸赤潮发展过程及成因[J].海洋与獭沼、2001、 32(2): 159-167。
- [122] 席少霖,赵凤治.最优化计算方法[M].上海:上海科学技术出版社,1983.

- [123] 夏乐天、朱永志、丁程随机讨程[M]、南京、河海大学出版社、2000、
- [124] 夏综万, 下斌. 大鵬湾的赤潮生态仿真模型[J]. 海洋与潮沼, 1997, 28(5); 468 474.
- [125] 肖**健**华, 吴今培, 杨叔子. 基于 SVM 的综合评价方法研究[J]. 计算机工程, 2002, 28 (8): 28-30.
- [126] 谢中华, 运用混合回归模型预报赤潮[J]. 海洋技术, 2004, 23(1): 27-30.
- [127] 徐家声. 水动力状况与赤潮生物的聚集和扩散[J]. 海洋环境科学,1994,13(3);19-22
- [128] 许卫忆,朱德弟.赤潮生消过程的數值模拟与对赤潮研究的几点认识:赤潮监测与预据研究论文洗编[C].杭州.国家海洋局第二海洋研究所,2000.
- [129] 许卫忆,朱德弟.实际海域的赤潮生消过程數值模拟[J].海洋与潮阳,2001,32(6): 598-604.
- [130] 杨槐,朱华,褚亦清.一类非线性系统在随机激励下的分叉[J].应用力学学报、 1993、10(4):69-71.
- [131] 杨建强,罗先香,丁德文,等。赤潮预测的人工神经网络方法初步研究[J].海洋科学 讲局。2003.21(3):318-324.
- [132] 杨建强,高振会、应用遗传神经网络方法分析赤潮监测数据[J]. 黄渤海海洋,2002, 20(2):77-82.
- [133] 于保华、陈瑛、渤海海洋污染与赤潮[J], 海洋信息, 2000 (4); 25-26.
- [134] 于贵瑞,生态系统管理学的概念框架及其生态学基础[J].应用生态学报,2001,12 (5):787-794.
- [135] 于志刚,米铁柱、谢宝东、二十年来渤海生态环境参数的演化和相互关系[J].海洋环 塘科学、2000, 19(1): 15-19.
- [136] 曾活水、林燕顺、魏瑞梅、厦门西海域赤潮成因与细菌量相关性的研究[J].海洋学报、1993、15(6): 105-110.
- [137] 张浩然, 韩正之. 支持向量机[J]. 计算机科学, 1995, 29(12): 135-138.
- [138] 张季栋, 日本赤潮研究和防治[』]. 海洋通报, 1995, 14(6): 78-82.
- [139] 张锦炎,冯贝叶.常微分方程几何理论与分岔问题[M].北京:北京大学出版社, 1987
- [140] 张利民, 钱宏林, 中国赤潮研究与防治[M]. 北京: 海洋出版社, 2004: 196-201.
- [141] 张启东, 黄骅沿海赤潮发生机制的初步探讨[M], 海洋科学, 1993 (6): 57-60.
- [142] 张启东, 黄贴沿海的赤獭发生机制[1], 河北渔业, 1994 (3): 5-8.
- [143] 张若华, 蒋庆堂、关于天津市沿海虾池赤潮综合防治技术研究的统计分析的探讨[J]、 现代渔业信息, 1995, 10(2): 24-26.
- [144] 张素美,邓子辰. 非线性动力方程的增维精细积分法[J]. 计算力学学报, 2003, 20 (4): 423-426.
- [145] 张学工. 关于统计学习理论与支持向量机[J]. 自动化学报, 2000, 26(1): 32-42.
- [146] 张宜辉,郑天凌. 赤獭的研究动向与防治对策[J]. 福建环境, 1999, 16(2): 15 17.
- [147] 张芷芬,丁同仁,黄文灶,等.微分方程定性理论[M].北京:科学出版社,1997.
- [148] 张志祥、随机扰动间断动力系统的极限性质及其应用[J]. 数学的实践与认识, 2002,

- 32(4), 651 657.
- [149] 赵冬至,陈江麟,渤海,黄海赤潮发生规律研究:赤潮灾害监测与评估研究文集[C]. 大连,国家海洋环境临测中心,2000.
- [150] 赵冬至、海洋环境污染与灾害卫星遏感业务化监测系统研究[J]. 遏感信息, 1999 (2): 22-25.
- [151] 赵冬至、赵玲、1998年渤海赤潮成因分析、渤海赤潮灾害监测与评估研究文集[C]: 67-70. 大连: 国家海洋环境监测中心、2000.
- [152] 赵彦順, 李桃楼, 赵宁, 赤潮漫谈[J], 化学教学, 2000(1); 26-27.
- [153] 郑紅军, 周旭. 统计学习理论及支持向量机概述[J]. 現代电子技术, 2003, 147(4): 59-61.
- [154] 郑伟谋、郑柏林、李用符号动力学[M]、上海、上海科技教育出版社、1994、
- [155] 钟万勰, 欧阳华江, 邓子辰. 计算力学与最优控制[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1993.
- [156] 钟万勰. 结构动力方程的精细时程积分法[J]. 大连理工大学学报, 1994, 34(2): 131 - 136.
- [157] 周明江,朱明远,张经.中国赤潮的发生趋势和研究进展[3].生命科学,2001,13 (2):54-60.
- [158] 朱位秋. 非线性随机动力学与控制 Hamilton 理论体系框架[M]. 北京: 科学出版社, 2003.
- [140] 朱位秋、随机振动[M]、北京、科学出版社、1998、
- [160] 庄栋法. 初析赤潮成因研究的图隔实验结果及几个理化因子与硅藻赤潮的关系[J]. 海洋与潮沼, 1994, 25(2): 139-145.
- [161] 邹景忠.赤潮[J]. 华夏星火, 2001(10): 68-68.
- [162] 領藏美,张朝贤.赤棚的主要特征参敷和化学环境[J]. 黄渤海海洋,1992,10(3):73 -77.
- [163] Edwards A M. Adding detritus to a nutrient phytoplankton zooplankton model; a dynamical systems approach[J]. Journal of Plankton Research, 2001, 23(4): 389-413.
- [164] Buja, Hastie T, Tibshirani R. Linear smoothers and additive models (with discussion) [J]. Ann Statist, 1989, 17: 453 – 555.
- [165] Edwards A M, Bees M A. Generic dynamics of a simple plankton population model with a non - integer exponent of closure chaos[1]. Solitons and Fractals, 2001, 12; 289-300.
- [166] Hombach A, Heuser C, Marquardt T. Standing stock and production rate of phytoplankton and a red tide outbreak in a heavily entrophic embayment, Dokai Bay, Japan [3]. Marine Pollution Bulletin, 2001. 2(11): 1177-1189.
- [167] Ariaratnam S T, Xie W C. Lyapunov exponents and stochastic stability of coupled linear systems under real notae excitation ASME[J]. Journal of Applied Mechanics, 1992, 59: 664-673.
- [168] Arnold L. Paparicolano G., Wilhstatz V. Asymptotic analysis of the Lyapamov exponent and rotation number of the random oscillator and application [J]. SIAM Journal of Applied Mechanics, 1986, 46(3): 427–450.

- [169] Arthur E. Mynett. Capabilities and development in modelling paradagms for manne and coastal zone processes [J]. Second International Workshop on Coastal Eutrophication (Keynote lectures). 2002(9):21–24.
- [170] Spagnolo B, Barbera A L. Role of the noise on the transient dynamics of an ecosystem of interacting species [J]. Physica A, 2002, 315(1): 114-124.
- [171] Dasarathy B. Nearest Neithbor(NN) norms: NN pattern classification techniques [M]. London; IEEE Press. 1991.
- [172] Welch B L. On the comparison of several mean values: an alternative approach[J]. Biometrika, 1951, 38: 330-336.
- [173] Spagnolo B, Valenti D, Fiasconaro A. Noise in ecosystems: a short review [J]. Mathematical Bioaciences and Engineering, 2004, 1(1): 185-211.
- [174] Silverman B W. Density estimation for statistics and data analysis [M]. London: Chapman and Hall. 1986.
- [175] Silverman B W. Density estimation[M]. London: Chapman and Hall, 1990.
- [176] Breiman L. Arcing classifiers[J]. Annals of Statistics, 1998, 26(3): 801 849.
- [177] Breiman L. Bagging predictors [J]. Machine Learning, 1996, 26(2); 123.
- [178] Chavez C C, Song B. Dynamical models of tuberculosis and their applications [J]. Mathematical Biosciences and Engineering, 2004, 1(2): 361-404.
- [179] deBoor C. A practial guide to splines. Berlin: Springer Verlag, 1978.
- [180] Gu C, Bates D M, Chen Z, et al. The computation of GCV functions through Householder tridiagonalization with application to the fitting of interaction spine models [3]. SIAM J Matrix Analysis. 1990(10): 457 – 480.
- [181] Gu C, Wahba G. Minimizing GCV/CML scores with multiple smoothing parameters via the Newton method: Tech Report 847 [R]. Unit of Wisconsin; Dept of Statistics, 1988.
- [182] Stone C J, Koo C Y. Additive splines in statistics[J]. Annual Meeting of Amer Statist Assoc, 1985(8): 45-48.
- [183] Stone C J. Nonparameter regression and its application (with discussion) [J]. Ann Statistic, 1977(5): 595-645.
- [184] Gardiner C J. Handbook of stochastic methods [M]. Berlin: Springer Verlag, 1985.
- [185] Aha D, Kibler D, Albert M. Instance based learning algorithms [1]. Machine Learning, 1991 (6): 37-66.
- [186] Kibler D, Aha D, Albert M. Instance based prediction of real valued attributes [J]. Comput intell. 1989(5): 51 – 57.
- [187] Donobo D L, Johnstone I. Projection based approximation and a duality with kernel methods [J]. Ann Statist, 1989, 17: 58 – 106.
- [188] Shepard D. A two dimensional interpolation functions for irregularly spaced data: ACM NAT CONF, 1964[C]. Australians: ACM.
- [189] Townsend D W. Neal R Pettigrew Offshore Blooms of the Red Tide Danolla gellate, Alexan-drium sp, in the Gulf of Manne [J]. Continental Shelf Research, 2001, 21(4): 347 369.

- [190] Huang D W, Wang H L, Qiao Y, Zhu Z Z. Stochastic Hopf bifurcation of four wheel steering system: proceedings of the fifth internstituand conference on stochastic structural dynamics [C]. Hangphou: China, 2003, 207 214.
- [191] Drucker H, Burges C, Kaufman L, et al. Neural information processing systems [M]. Cambridge: MIT Press. 1997(9).
- [192] Parzen E. On estimation of a probability density function and mode[J]. Ann Math Statistic, 1962, 33: 1065-1076.
- [193] Feigenbaum M J. Quantitative Universality for a class of nonlinear transformations [J]. J Stat Phys., 1978, 19; 25 – 52.
- [194] Freund Y, Schapire R B. A decision theoretic generalization of online learning and an application to boosting [1]. Journal of Computer and System Sciences, 1997. 55(1): 119 139.
- [195] Freund Y. Boosting a weak algorithm by majority information and computation [J]. 1995, 121 (2): 256-285.
- [196] Webb G F, Blaser M J, Zhu H, et al. Critical role of noncommial transmission in the toronto SARS outbreak [J] I. Mathematical Biosciences and Engineering, 2004, 1(1): 1-13.
- [197] Ridgeway C. A note on out of bag estimation for estimating the optimal number of boosting iterations [R/OL]. working paper; http://www.i-pensieri.com/gregr/gbm shtml, 2003.
- [198] Glenn M, Renshaw E, Gibson G. Stochastic modeling of environmental variation for biological populations [J]. Theoretical Population Biology, 2000, 57; 197 – 217.
- [199] Hiiro K. Development of continuous monitoring systems for environmental parameters related to red tides [J]. Red tide: Biology, Environmental Science and Toxicology, 1987, 165 – 168.
- [200] Hodgkiss I.J. Are changes in N:P ratios in coastal waters the key to increase red tide bloom[J]. Hydrobiologia, 1997, 352(5): 141 – 147.
- [201] Hsu C W, Lin C J. A simple decomposition method for support vector machine [J]. Machine Learning, 2002, 46(1): 241-314.
- [202] Wilson H, Recknagel F. Towards a genetic artificial neural network model for dynamic prediction of algal abundance in freshwater lakes [J]. Ecological Modelling, 2001, 146: 69 84.
- [203] Fredman J H. Multivariate adaptive regression splines (with discussion) [J]. The annals of statistics, 1991, 19: 1-141.
- [204] Freidman J H. Greedy function approximation; a gradient boosting machine [J]. Annals of Statistics, 2001, 29; 1189 1232.
- [205] Friedman J H, Silverman B W. Flexible parsimonious smoothing and additive modeling [J]. Technometrics, 1989, 31: 3-39.
- [206] Friedman J H, Stuetzle W. Projection pursuit regression [J]. J Amer Statist Assoc, 1981, 76: 817 - 823.
- [207] Quinlan J R. C4 5: Programs for muchine learning [M]. San Mateo, Calif: Mongan Kaufmann, 1993.
- [208] Tukey J W. Exploratory data analysis [M]. London: Addison Wesley, 1977.
- [209] Jason B, Recknagel F. Inducing explanatory rules for the prediction of algal blooms by genetic

- algorithms[J]. Environment International, 2001, 27: 237-242.
- [210] Jason B, Recknagel F. Knowledge discovery for prediction and explanation of blue green algal dynamics in lakes by evolutionary algorithms [J]. Ecological Modelling, 2001, 146: 253 – 262.
- [211] Simonoff J S. Smoothing methods in statistics[M]. Berlin: Springer, 1996.
- [212] John J W, Kenneth D H. A numerical analysis of landfell of the 1979 red tide of karenia brevis along the west coast of florida[J]. Continental Shelf Research, 2002, 22(1): 15-38.
- [213] Aparicio J P, Solari H G. sustained oscillations in stochastic systems [J]. Mathematical Biosciences, 2001, 169; 15 – 25.
- [214] Khasmiskii R Z. Stochastic stability of differential equations [M]. Netherlands; Sijthoff and Noordhoff, 1980.
- [215] Kudela R M, Coehlan W P. Nirrogen and carbon uptake kinetics and the influence of irradiance for a red tide bloom off Southern California[1]. Aquatic Microbial Ecology, 2000, 21(1); 31 – 47.
- [216] Shumaker L L. On spaces of piecewise polynomials of two variables Approximation[J]. Theory and Soline Functions, 1984, 151 – 179.
- [217] Breiman L, Fredman J H, Olshen R A, Stone C J. Classification and regression trees [M]. New York: Chapman and Hall, 1984.
- [218] Lin L. Stability and Hopf bifurcation of a differential delay system[J]. Journal of Biomathematics, 2002, 17(2): 157-164.
- [219] Stitson M O, Weston J A, Garmerman A, et al. Theory of support vector machines: technical report CSD - TR - 96 - 17 Computational Intelligence Croup[R]. Royal Holloway: University of London, 1996.
- [220] Bonzzini M, Lenarduzzi L. Locally smoothing for scattered noisy data[J]. International Series of Nuemerical Mathematics, 1985, 75: 51-60.
- [221] Müller K R, Smola A J, Ratsch G, et al. Predicting time series with support vector machines: in Proc of ICANN'97, 1997[C]. Berlin: Soringer Lecture Notes in Computer Science.
- [222] Namachchiwaya N S. Stochastic bifurcation [J]. Applied Mathematics and Computation, 1990. 38: 101 – 159.
- [223] Namachiwaya N S, Roessel V, Talwar S. Maximal Lyapumov exponent and almost sure stability for coupled two degree of freedom stochastic systems [J]. ASME Journal of Applied Mechanics, 1994, 61: 446 – 452.
- [224] Oseledec V L. A multiplicative ergodic theorem Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems [J]. Transaction of the Moscow Mathematical Society, 1968, 19: 197 – 231.
- systems[J]. Transaction of the Moscow Mathematical Society, 1968, 19: 197-231.

 [225] Diaconis P, Shahshahani M. On non-linear functions of linear combinations[J]. SIAM J Sci

Stat Comput, 1984(5): 175 - 191.

- [226] Glibert P, Pitcher G. Global ecology and oceanography of harmful algal blooms [M]. Baltimore and Paris; SCOR and IOC, 2001.
- [227] Park, Byeong U, Marron J S. Comparison of data driven bandwidth selectors [J]. Journal of the American Statistical Association, 1990, 85; 66 – 72.

- [228] Platt J C. Fast training of support vector machines using sequential minimal optimization Advances in Kernel Methods; Support Vector Learning [M]. Cambridge: MIT Press, 1999.
- [229] Yu Q, Hongli W, Feng Z, et al. Stochastic Pitchfork bifurcation of Vehicle steering system: APVC2001[C]. Hangzhou: China.
- [230] Chen Q W., Arthur E. Mynett integration of data mining techniques and heuristic knowledge in fuzzy logic modeling of algal biomass in the north sea: second international workshop on coastal eutrophication, (proceedings), November , 2002 [C]. Chongqin: China.
- [231] Quinlan J R. Bagging boosting and C4.5; Proc the 13" National Conference on Artificial Intelligence, 1993 [C]. Portland: OR 996.
- [232] Upadhyay R K, Rai B, Iyengar S R. How do ecosystems respond to external perturbations[J]. Chaos. Solitons and Fractals. 2000(11): 1963-1982.
- [233] Lópes R D, Prunaret F. Complex behavior in a discrete coupled logistic model for the symbiotic interaction of two species [J]. Mathematical Biosciences and Engineering, 2004, 1(2): 307 – 324.
- [234] Recknagel F, Wilson H. Elucidation and prediction of aquatic ecosystems by artificial neural networks [M]. Berlin: Springer, 2000.
- [235] Shevade S K, Keerthi S, Bhattachavyy C, et al. Improvements to SMO algorithm for SVM regression[J]. IEEE Trans on Neural Networks, 2000, 11(5): 1189 1193.
- [236] Coles S G., Taven J A. Statistical methods for extreme values; a course presented at the RSS conference. 1998. C. Strathelyde: RSS.
- [237] Sheather S J, Jones M C. A reliable data based bandwidth selection method for kernel density estimation [1]. Journal of the Royal Statistical Society (B), 1991, 53: 683 - 690.
- [238] Schikopf B, Smola A. A tutorial on support vector regression [R]. Neuro COL 72: Technical Report Series NC2 - TR - 1998 - 030, 1994.
- [239] Gunn S. Support vector machines for classification and regression [R]. University fo Notre Dame: ISIS Technical Report, 1998.
- [240] Stockwell D.R. Machine learning methods for ecological modeling chapter Genetic Algorithms; species distribution modeling [M]. Berlin: Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [241] Coles S. An introduction to statistical modeling of extrem values [M]. Berlin: Springer, 2001.
- [242] Mitra S, Sankar K P, Mitra P. Data mining in soft computing framework: A survey[J]. IEEE Transactions On Knowledge And Data Engineering, 1997, 3(1): 3-14.
- [243] Hastie T, Tibehirani R, Friedman J H. The elements of statistical learning [M]. Berlin: Springer Verlag, 2001.
- [244] Hastie T, Tibshirani R. Genaralized additive models[M]. London: Chapman and Hall, 1990.
- [245] Hastie T, Tibshirani R. Generalized additive models (with discussion) [1]. Statist Science 1986 (1): 297 – 318.
- [246] Cherkaesky V, Mulier F. Guest editoral Vapnik Chervonenkis (VC) Learning theory and its application [J]. Transaction on Neural Networks, 1999, (10): 781 - 795.
- [247] Vapnik V. The nature of statistical learning theory [M]. NY; Springer Verlag, 1995.

- [248] Vapnik V, Golowich S, Smola A Support vector method for function approximation, regression estimation, and signal processing: Neural Information Processing Systems [C]. Cambridge: MIT Press. 1997.
- [249] Cleveland W S, Devlin S J. Locally weighted regression: an approach to regression analysis by local fitting [J]. Amer Statistic Assoc, 1983,83: 596-610.
- [250] Cleveland W S. Robust locally weighted regression and smoothing scatter plots[J]. Amer Statistic Assoc, 1979, 74: 828 836.
- [251] Wiggins S. Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos [M]. NewYork: Vol 2 Springer - Verlag., 1990.
- [252] Kuang Y, Huisman J, Elser J J. Stochometric plant herbivore models and their interpretation [J]. Mathematical Biosciences and Engineering, 2004, 1(2): 215-222.
- [253] Roelke D, Buyukatos Y. The diversity of harmful algal bloom triggering mechanisms and the complexity of bloom initiation[J]. Human and Ecological Risk Assessment, 2001, 7(5): 1347 - 1362.
- [254] Smayda T J. Harmful algal blooms; Their ecophysiology and general relevance to phytoplankton blooms in the sea[J]. Limnology and Oceanography, 1997, 42(5); 1137 – 1153.
- [255] Paerl H W. Nuisance phytoplankton blooms in coastal estuarine and inland waters [J]. Limnology and Oceanography, 1988, 33(4): 823-847.
- [256] Sellner K G. Physiology ecology and toxic properties of marine cyanobacteria blooms [J]. Limnology and Oceanography, 1997, 42(5): 1089 – 1104.
- [257] Bricelj V M, Lonsdale D J. Aureococcus anophagefferens: causes and ecological consequences of brown tides in US mid - Atlantic coastal waters [J]. Limnology and Oceanography, 1997, 42 (5) 1023 - 1038.
- [258] Huisman J, Weissing F J. Biological conditions for oscillations and chaos generated by multispecies competition [J]. Ecology, 2001, 82(10): 2682-2695.
- [259] Huisman J, Weissing F J. Fundamental unpredictability in multispecies competition [1]. American Naturalist, 2001, 157(5): 488-494.
- [260] Tester A, Steidinger K A. Gymnodinium breve red tide blooms: initiation transport and consequences of surface circulation [J]. Limnology and Oceanography, 1997, 42(5): 1039-1051.
- [261] Anderson D M. Bloom dynamics of toxic Alexandrium species in the northeastern US[J]. Limnology and Oceanography, 1997, 42(5); 1009-1022.
- [262] Lek S, Guegan J F. Artificial neural networks as a tool in ecological modeling: an introduction
- [J]. Ecological Modelling, 1999, 120(23); 65-73.
 [263] Recknagel F. ANNA Artificial Neural Network model for predicting species abundance and
- [264] Gurbuz H. Predicting dominant phytoplankton quantities in a reservoir by using neural networks [1]. Hydrobiologia, 2003, 504(13): 133 – 141.

succession of blue - green algae[J]. Hydrobiologia. 1997, 49(3): 47 - 57.

[265] Olden J D. An artificial neural network approach for studying phytoplankton succession [J]. Hydrobiologia, 2000, 436(13): 131-143.

- [266] Xu M. Application of Bayesian regularized BP neural network model for analysis of aquatic ecological data A case study of chlorophyll.—a prediction in Namusi water area of Dougling Lake [J]. Journal of Environmental Sciences China, 2005. 17(6): 946 952.
- [267] Cerna I., Chytry M. Supervised classification of plant communities with artificial neural networks [J]. Journal of Vegetation Science, 2005, 16(4): 407-414.
- [268] Lee J H. Neural network modelling of coastal algal blooms[J]. Ecological Modelling 2003, 159 (2-3): 179-201.
- [269] Marce R. A neum fuzzy modeling tool to estimate fluvial nutrient loads in watersheds under time – varying human impact[J]. Limnology and Oceanography – Methods, 2004, (2): 342.– 355.
- [270] Czogala J L. Fuzzy and neuro fuzzy intelligent systems [M]. New York: Physica Verlag, 2000.
- [271] Altrock C. Fuzzy logic and neuro fuzzy applications explained [M]. Englewood Cliffs NJ: Prentice Hall, 1995.
- [272] Foody G M. Approaches for the production and evaluation of fuzzy land cover classifications from remotely - sensed data [J]. International Journal of Remote Sensing 1996, 17(7); 1317 – 1340.
- [273] Recknagel F. Artificial neural network approach for modelling and prediction of algal blooms
 [J]. Ecological Modelling, 1997, 96(1-3); 11-28.
- [274] Marsili Libelli S. Fuzzy prediction of the algal blooms in the Orbetello lagoon[J]. Environmental Modelling and Software, 2004, 19(9): 799 808.
- [275] Soyupak S, Chen D G. Fuzzy logic model to estimate seasonal pseudo steady state chlorophyll a concentrations in reservoins[1]. Environmental Modeling and Assessment, 2004, 9(1): 51 – 59.